

Klausur zur Vorlesung
Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik
Wintersemester 2024/2025

Name: _____

Matr. Nr.: _____

Studiengang/Schwerpunkt: _____

Unterschrift: _____

Klausurergebnis			
Aufgabe 1 (10 Punkte)		Aufgabe 2 (10 Punkte)	
Aufgabe 3 (10 Punkte)		Aufgabe 4 (10 Punkte)	
Aufgabe 5 (20 Punkte)		Aufgabe 6 (15 Punkte)	
Aufgabe 7 (15 Punkte)		Aufgabe 8 (10 Punkte)	
Gesamt (100 Punkte)		Note	

Bearbeitungshinweise:

- Die Bearbeitungsdauer der Klausur beträgt 120 Minuten.
- Überprüfen Sie bitte sofort nach Erhalt die Vollständigkeit der Unterlagen (15 Seiten).
- Bitte lassen Sie die Klausur zusammengeheftet.
- Schreiben Sie bitte auf jedes Blatt Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer.
- Falls notwendig, dann benutzen Sie die Rückseite des jeweiligen Aufgabenblatts für Notizen und Entwürfe.
- Geben Sie bei Ihren Berechnungen Zwischenschritte und die Namen der verwendeten Formeln an.
- Geben Sie alle Wahrscheinlichkeitswerte als Bruch oder auf 6 Stellen hinter dem Komma gerundet an.

Viel Erfolg!

Aufgabe 1. (10 Punkte)

Gegeben ist der Ereignisraum $\Omega = \{a, b, c, d, e, f, g\}$. Die Wahrscheinlichkeiten der Elementarereignisse sind wie folgt:

ω	a	b	c	d	e	f	g
$Pr[\omega]$	0.1	0.02	0.39	0.06	0.15	0.03	0.25

Gegeben sind die folgenden Ereignisse:

- $A = \{a, c, d\}$,
- $B = \{a, b, c, e\}$ und
- $C = \{a, d, e, g\}$.

Berechnen Sie die folgenden Wahrscheinlichkeiten:

a) $Pr[\overline{B}]$:

b) $Pr[A \cap C]$:

Name: _____

Matr. Nr.: _____

c) $Pr [A \cup \overline{(B \cup C)}]:$

d) $Pr [A \mid \overline{C}]:$

Aufgabe 2. (10 Punkte)

Bei einem Zufallsexperiment kommen ein fairer Würfel und eine mit 4 weißen und 3 schwarzen Kugeln gefüllte Urne zum Einsatz. Das Experiment läuft wie folgt ab: Zuerst wird der Würfel geworfen. Erscheint eine Zahl kleiner-gleich 2, dann werden ohne Zurücklegen zwei Kugeln aus der Urne gezogen. Andernfalls werden mit Zurücklegen zwei Kugeln aus der Urne gezogen.

- a) Modellieren Sie das Zufallsexperiment mithilfe eines Ereignisbaums als diskreten Wahrscheinlichkeitsraum.

Name: _____

Matr. Nr.: _____

- b) Wie lautet die formale Definition des diskreten Wahrscheinlichkeitsraums, der durch das obige Zufallsexperiment festgelegt wird.

- c) Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist die zweite gezogene Kugel schwarz?

Name: _____

Matr. Nr.: _____

Aufgabe 3. (10 Punkte)

Gegeben ist die normalverteilte Zufallsvariable X mit dem Erwartungswert $\mu = 3$ und der Varianz $\sigma^2 = 1.21$. Berechnen Sie die folgende Wahrscheinlichkeit:

$$Pr [2.714 \leq X \leq 4.298].$$

Nutzen Sie zur Berechnung die Wertetabelle der Standardnormalverteilung.

Name: _____

Matr. Nr.: _____

Aufgabe 4. (10 Punkte)

Gegeben ist eine Zufallsvariable $X \sim \text{Geo}(p)$ mit $p = 0.63$.

Berechnen Sie die folgenden Werte:

a) $Pr [X = 4]$:

b) $\text{Exp}[X]$:

c) $\text{Var}[X]$:

Aufgabe 5. (20 Punkte)

Ein Supermarkt bietet Obstkisten zum Verkauf an. Jede Kiste enthält zwei Äpfel, drei Bananen und fünf Birnen. Jede Frucht wird unabhängig von den anderen ausgewählt und in die Kiste gepackt. Das Gewicht eines Apfels (in Gramm) ist normalverteilt mit den Parametern $\mu_1 = 80$ und $\sigma_1^2 = 625$. Das Gewicht einer Banane (in Gramm) ist normalverteilt mit den Parametern $\mu_2 = 130$ und $\sigma_2^2 = 225$. Das Gewicht einer Birne (in Gramm) ist normalverteilt mit den Parametern $\mu_3 = 75$ und $\sigma_3^2 = 400$.

- a) Welche Verteilung besitzt das Gesamtgewicht einer Obstkiste?

Name: _____

Matr. Nr.: _____

- b) Schätzen Sie die Wahrscheinlichkeit ab, dass das Gewicht einer Kiste um mindestens 250 Gramm vom mittleren Gewicht abweicht.

Aufgabe 6. (15 Punkte)

Die diskrete Zufallsvariable X wird durch folgende Wertetabelle definiert:

k	$Pr [X = k]$
-3	0.21
-2	0.27
2	0.08
4	0.16
7	0.14
10	0.05
13	0.09

- a) Berechnen Sie $\text{Exp}[X]$:

Name: _____

Matr. Nr.: _____

b) Berechnen Sie $\text{Exp}[X^2]$:

c) Berechnen Sie $\text{Var}[X]$:

Aufgabe 7. (15 Punkte)

Ein Produzent von Kugelschreibern testet vor der Auslieferung jedes seiner hochwertigen Schreibgeräte auf Fehler. Zur Qualitätssicherung kommen die drei Prüfgeräte P_1 , P_2 und P_3 zum Einsatz. Jedes dieser Prüfgeräte liefert hin und wieder ein fehlerhaftes Ergebnis, bei dem ein defekter Kugelschreiber nicht als solcher erkannt wird. Folgende Tabelle enthält die Fehlerraten der Prüfgeräte:

Prüfgerät	P_1	P_2	P_3
Fehlerrate	4%	2%	7%

Die Gesamtproduktion der Kugelschreiber verteilt sich wie folgt auf die Prüfgeräte:

Prüfgerät	P_1	P_2	P_3
Anteil	12%	55%	33%

- a) Stellen Sie obigen Sachverhalt in der Schreibweise der Wahrscheinlichkeitsrechnung dar. Definieren Sie hierzu passende Ereignisse und geben Sie die (gegebenenfalls bedingten) Wahrscheinlichkeiten an.

Name: _____

Matr. Nr.: _____

- b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird ein defekter Kugelschreiber an einen Kunden ausgeliefert?

Name: _____

Matr. Nr.: _____

- c) Eine Kundin reklamiert einen defekten Kugelschreiber. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass dieser mit dem Prüfgerät P_3 getestet wurde?

Name: _____

Matr. Nr.: _____

Aufgabe 8. (10 Punkte)

Gegeben ist ein fairer Würfel mit den Seitenbeschriftungen 0, 0, 1, 1, 1, 1. Der Würfel wird wiederholt geworfen, bis zweimal hintereinander eine 1 erscheint. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass das Zufallsexperiment nach höchstens vier Würfelwürfen beendet ist.