Prof. Dr.Christoph Karg
Hochschule Aalen

Klausur zur Vorlesung Wahrscheinlichkeitstheorie & Statistik

Wintersemester 2024/2025

Lösungshinweise

(Version 1.0.0)

(alle Angaben ohne Gewähr[1])

Aufgabe 1. $(2 + 2 + 3 + 3 = 10$ Punkte)

a) $Pr\left[\,\overline{B}\,\right] = Pr\left[\,\{d, f, g\}\,\right] = 0.06 + 0.03 + 0.25 = 0.34$

b) $Pr\left[\,A \cap C\,\right] = Pr\left[\,\{a, d\}\,\right] = 0.1 + 0.06 = 0.16$

c) $Pr\left[\,A \cup \overline{B \cup C}\,\right] = Pr\left[\,\{a, c, d, f\}\,\right] = 0.1 + 0.39 + 0.06 + 0.03 = 0.58$

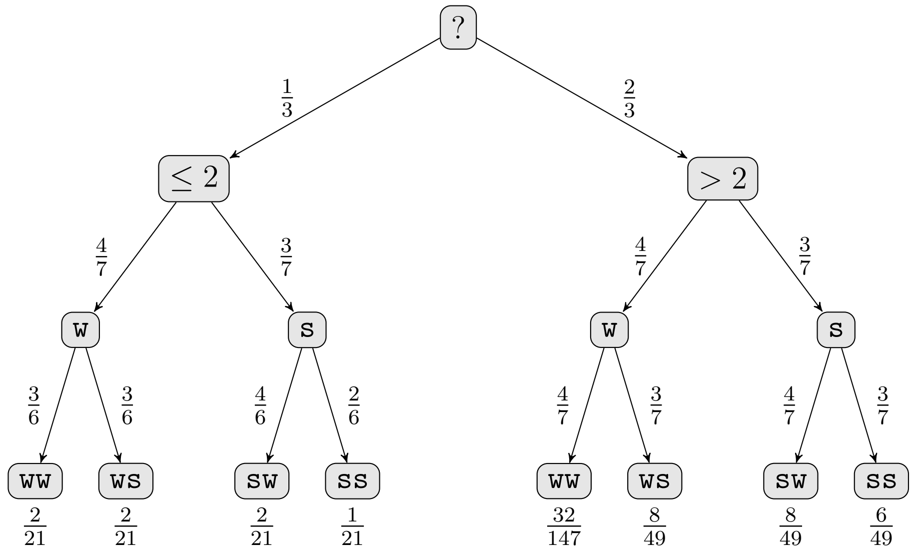
d) Es gilt:

$$\begin{aligned} Pr\left[\,A \mid \overline{C}\,\right] &= \frac{Pr\left[\,A \cap \overline{C}\,\right]}{Pr\left[\,\overline{C}\,\right]} \\ &= \frac{Pr\left[\,\{c\}\,\right]}{Pr\left[\,\{b, c, f\}\,\right]} \\ &= \frac{0.39}{0.02 + 0.39 + 0.03} \\ &= 0.886364 \\ &= \frac{39}{44} \end{aligned}$$

[1] Sachdienliche Hinweise zur Fehlerbekämpfung senden Sie bitte an christoph.karg@hs-aalen.de.

Aufgabe 2. $(10 + 6 + 4 = 20$ Punkte)

a) Ereignisbaum:



b) Der durch das Zufallsexperiment festgelegte diskrete Wahrscheinlichkeitsraum ist $(\Omega, \Pr)$, wobei $\Omega = \{\texttt{ww}, \texttt{ws}, \texttt{sw}, \texttt{ss}\}$ und

ω	$Pr[\omega]$
ww	$\frac{2}{21} + \frac{32}{147} = \frac{46}{147}$
ws	$\frac{2}{21} + \frac{8}{49} = \frac{38}{147}$
sw	$\frac{2}{21} + \frac{8}{49} = \frac{38}{147}$
ss	$\frac{1}{21} + \frac{6}{49} = \frac{25}{147}$

c) Wahrscheinlichkeit, dass die zweite gezogene Kugel schwarz ist:

$$Pr[\{\texttt{ws}, \texttt{ss}\}] = \frac{38}{147} + \frac{25}{147} = \frac{3}{7}$$

Aufgabe 3. (10 Punkte)

Gegeben ist die Zufallsvariable $X \sim \mathcal{N}(3, 1.21)$. Also ist $\mu = 3$ und $\sigma = 1.1$ $(\sigma^2 = 1.21)$. Betrachte die Zufallsvariable $Y = \frac{X-3}{1.1}$. Es gilt: $Y \sim \mathcal{N}(0, 1)$. Durch Umformen erhält man $X = 1.1 \cdot Y + 3$.

$$\begin{aligned}
Pr[2.714 \leq X \leq 4.298] &= Pr[X \leq 4.298] - Pr[X \leq 2.714] \\
&= Pr[1.1 \cdot Y + 3 \leq 4.298] - Pr[1.1 \cdot Y + 3 \leq 2.714] \\
&= Pr[Y \leq 1.18] - Pr[Y \leq -0.26] \\
&= \Phi(1.18) - \Phi(-0.26) \\
&= \Phi(1.18) - 1 + \Phi(0.26) \\
&= 0.881000 - 1 + 0.602568 \\
&= 0.483568
\end{aligned}$$

Aufgabe 4. $(4+3+3=10$ Punkte)

$X \sim \text{Geo}(p)$ mit $p = 0.63$.

a) $Pr[X=4] = 0.37^3 \cdot 0.63 = 0.031911$

b) $Exp[X] = \frac{1}{p} = \frac{1}{0.63} = 1.587302$

c) $Var[X] = \frac{1-p}{p^2} = \frac{0.37}{0.63^2} = 0.932225$

Aufgabe 5. $(5+5=10$ Punkte)

Die Zufallsvariablen X_1, X_2 und X_3 stehen für das Gewicht eines Apfels, einer Banane beziehungsweise einer Birne. Es gilt:

$$\begin{aligned} X_1 &\sim \mathcal{N}(\mu_1;\sigma_1) \text{ mit } \mu_1 = 80, \sigma_1^2 = 625 \\ X_2 &\sim \mathcal{N}(\mu_2;\sigma_2) \text{ mit } \mu_2 = 130, \sigma_2^2 = 225 \\ X_3 &\sim \mathcal{N}(\mu_3;\sigma_3) \text{ mit } \mu_3 = 75, \sigma_3^2 = 400 \end{aligned}$$

a) Die Zufallsvariable X steht für das Gesamtgewicht der Früchte in der Obstkiste:

$$X = 2 \cdot X_1 + 3 \cdot X_2 + 5 \cdot X_3.$$

Es gilt: $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, wobei:

$$\begin{aligned} \mu &= 2 \cdot \mu_1 + 3 \cdot \mu_2 + 5 \cdot \mu_3 \\ &= 2 \cdot 80 + 3 \cdot 130 + 5 \cdot 75 \\ &= 925 \\ \sigma^2 &= 2^2 \cdot \sigma_1^2 + 3^2 \cdot \sigma_2^2 + 5^2 \cdot \sigma_3^2 \\ &= 2^2 \cdot 625 + 3^2 \cdot 225 + 5^2 \cdot 400 \\ &= 14525 \end{aligned}$$

b) Abschätzung mit Ungleichung von Chebyshev:

$$\begin{aligned} Pr[|X-925| \geq 250] &\leq \frac{14525}{250^2} \\ &= 0.2324 \end{aligned}$$

Aufgabe 6. $(5+5+5=15$ Punkte)

a) Erwartungswert von X:

$$\begin{aligned} Exp[X] &= (-3) \cdot 0.21 + (-2) \cdot 0.27 + 2 \cdot 0.08 + 4 \cdot 0.16 \\ &\quad + 7 \cdot 0.14 + 10 \cdot 0.05 + 13 \cdot 0.09 \\ &= -0.63 + -0.54 + 0.15 + 0.64 + 0.98 + 0.5 + 1.17 \\ &= 2.28 \end{aligned}$$

b) Erwartungswert von X^2:

$$\begin{aligned} Exp\left[\,X^2\,\right] &= (-3)^2 \cdot 0.21 + (-2)^2 \cdot 0.27 + 2^2 \cdot 0.08 + 4^2 \cdot 0.16 \\ &\quad + 7^2 \cdot 0.14 + 10^2 \cdot 0.05 + 13^2 \cdot 0.09 \\ &= 1.89 + 1.08 + 0.32 + 2.56 + 6.86 + 5 + 15.21 \\ &= 32.92 \end{aligned}$$

c) Varianz von X:

$$\begin{aligned} Var\left[\,X\,\right] &= Exp\left[\,X^2\,\right] - Exp\left[\,X\,\right]^2 \\ &= 32.92 - 2.28^2 \\ &= 27.7216 \end{aligned}$$

Aufgabe 7. $(5 + 5 + 5 = 15$ Punkte)

a) Ereignisse:

- $P_i \rightsquigarrow$ Das Prüfgerät M_i kommt zum Einsatz, wobei $i = 1, 2, 3$.
- $F \rightsquigarrow$ Die Prüfung des Kugelschreibers liefert ein fehlerhaftes Ergebnis, d.h., der Defekt wird nicht erkannt.

Wahrscheinlichkeiten:

$$\begin{array}{lcl@{\qquad\qquad}lcl} Pr\left[\,F \mid P_1\,\right] &=& 0.04 & Pr\left[\,P_1\,\right] &=& 0.12 \\ Pr\left[\,F \mid P_2\,\right] &=& 0.02 & Pr\left[\,P_2\,\right] &=& 0.55 \\ Pr\left[\,F \mid P_3\,\right] &=& 0.07 & Pr\left[\,P_3\,\right] &=& 0.33 \end{array}$$

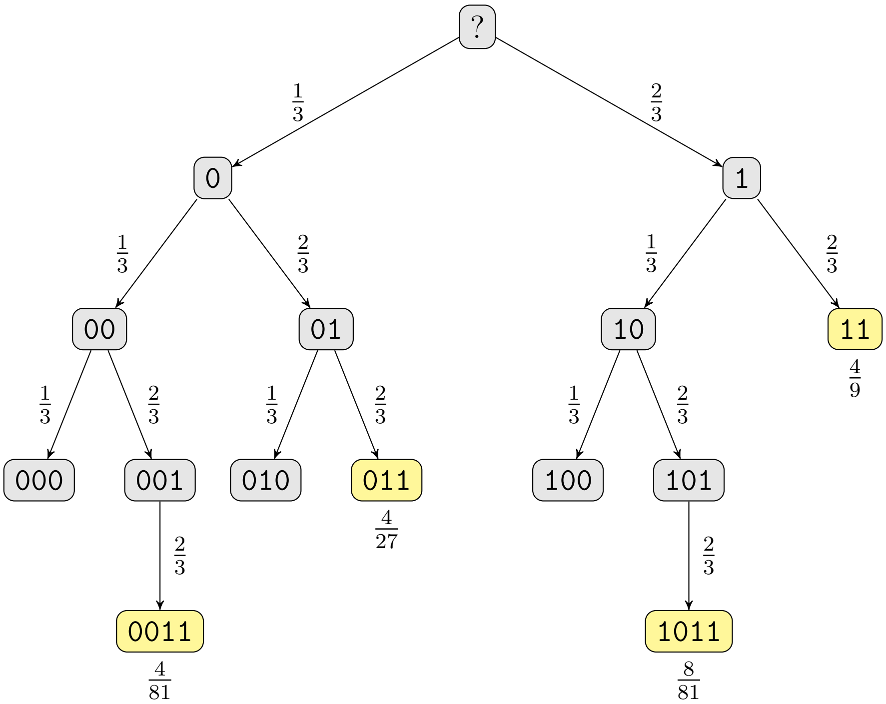
b) Anwendung des Satzes der totalen Wahrscheinlichkeit:

$$\begin{aligned} Pr\left[\,F\,\right] &= Pr\left[\,F \mid P_1\,\right] \cdot Pr\left[\,P_1\,\right] + Pr\left[\,F \mid P_2\,\right] \cdot Pr\left[\,P_2\,\right] + Pr\left[\,F \mid P_3\,\right] \cdot Pr\left[\,P_3\,\right] \\ &= 0.04 \cdot 0.12 + 0.02 \cdot 0.55 + 0.07 \cdot 0.33 \\ &= 0.0389 \end{aligned}$$

c) Anwendung des Satzes von Bayes:

$$\begin{aligned} Pr\left[\,P_3 \mid F\,\right] &= \frac{Pr\left[\,F \mid P_3\,\right] \cdot Pr\left[\,P_3\,\right]}{Pr\left[\,F\,\right]} \\ &= \frac{0.07 \cdot 0.33}{0.0389} \\ &= 0.593830 \end{aligned}$$

Aufgabe 8. (10 Punkte)



Wahrscheinlichkeiten der Binärwörter der Länge kleiner-gleich 4, die mit `11` enden:

$$Pr\,[\,\{\mathtt{11}\}\,] = \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9} = 0.444444$$

$$Pr\,[\,\{\mathtt{011}\}\,] = \left(\frac{1}{3}\right) \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{27} = 0.148148$$

$$Pr\,[\,\{\mathtt{0011}\}\,] = \left(\frac{1}{3}\right)^2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{81} = 0.049383$$

$$Pr\,[\,\{\mathtt{1011}\}\,] = \left(\frac{2}{3}\right) \cdot \left(\frac{1}{3}\right) \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{8}{81} = 0.098765$$

Für das Ereignis $A = \{\mathtt{11}, \mathtt{011}, \mathtt{0011}, \mathtt{1011}\}$ gilt:

$$Pr\,[\,A\,] = \frac{4}{9} + \frac{4}{27} + \frac{4}{81} + \frac{8}{81} = \frac{20}{27} = 0.740740$$