Prof. Dr.Christoph Karg
Hochschule Aalen

# Klausur zur Vorlesung Wahrscheinlichkeitstheorie & Statistik

## Sommersemester 2018

## Lösungshinweise

(Version 1.0.0)

(alle Angaben ohne Gewähr[1])

**Aufgabe 1.** $(5 + 5 + 5 = 15$ Punkte)

a) Erwartungswert von $X$:

$$\begin{aligned} Exp[X] &= 2 \cdot 0.12 + 5 \cdot 0.09 + 7 \cdot 0.23 + 8 \cdot 0.31 + 12 \cdot 0.17 + 15 \cdot 0.08 \\ &= 8.02 \end{aligned}$$

b) Erwartungswert von $X^2$:

$$\begin{aligned} Exp\left[X^2\right] &= 2^2 \cdot 0.12 + 5^2 \cdot 0.09 + 7^2 \cdot 0.23 + 8^2 \cdot 0.31 + 12^2 \cdot 0.17 + 15^2 \cdot 0.08 \\ &= 76.32 \end{aligned}$$

c) Varianz von $X$:

$$\begin{aligned} Var[X] &= Exp\left[X^2\right] - Exp[X]^2 \\ &= 76.32 - 64,3204 \\ &= 11.9996 \end{aligned}$$

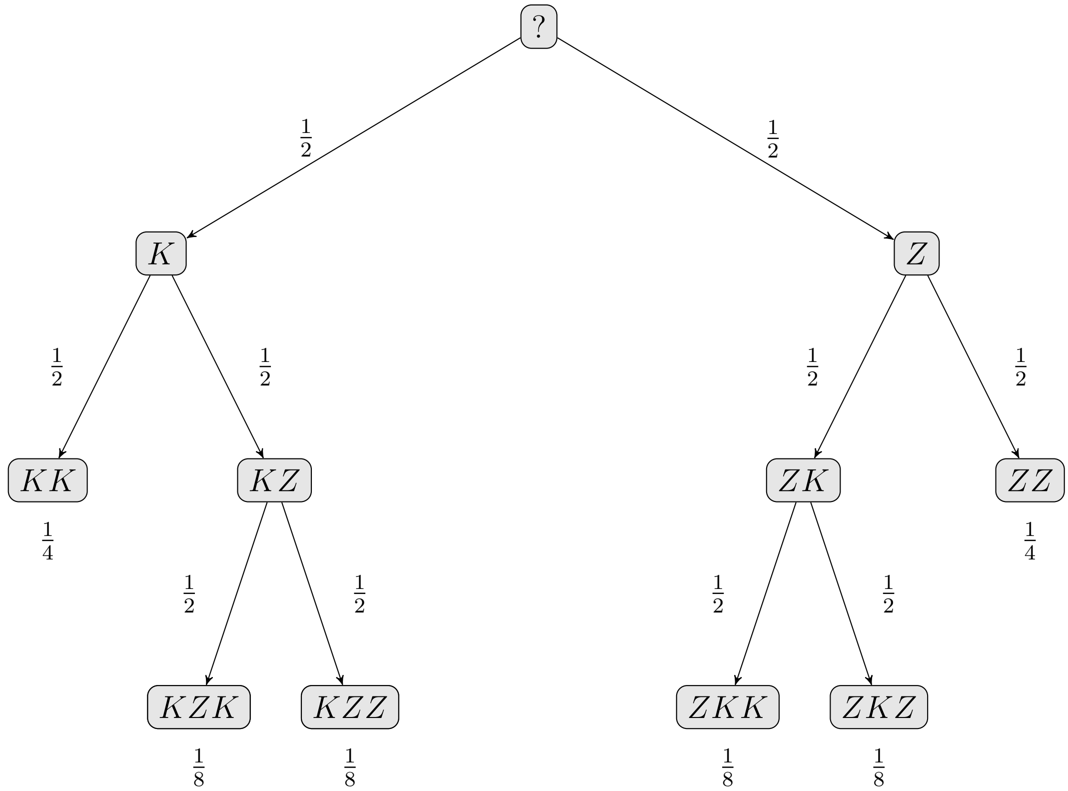
[1]Sachdienliche Hinweise zur Fehlerbekämpfung senden Sie bitte an christoph.karg@hs-aalen.de.

**Aufgabe 2.** $(8 + 4 + 3 = 15$ Punkte)

a) Das Zufallsexperiment besitzt den Ereignisraum

$$\Omega = \{KK, KZK, KZZ, ZZ, ZKK, ZKZ\}.$$

Die Wahrscheinlichkeiten werden durch folgenden Entscheidungsbaum ermittelt:




Ergebnis:

| $\omega$ | $Pr[\omega]$ |
|---|---|
| $KK$ | $1/4$ |
| $KZK$ | $1/8$ |
| $KZZ$ | $1/8$ |
| $ZZ$ | $1/4$ |
| $ZKK$ | $1/8$ |
| $ZKZ$ | $1/8$ |

b) Wahrscheinlichkeit, dass die Münze dreimal geworfern werden muss, unter der Annahme, dass beim ersten Wurf $K$ erscheint. Ereignisse:

- Dreimaliger Münzwurf: $A = \{KZK, KZZ, ZKK, ZKZ\}$.
- Erster Münzwurf liefert $Z$: $B = \{ZZ, ZKZ, ZKK\}$.

$$
\begin{aligned}
Pr[\,A \mid B\,] &= \frac{Pr[\,A \cap B\,]}{Pr[\,B\,]} \\
&= \frac{Pr[\,\{KZK, KZZ\}\,]}{Pr[\,\{ZZ, ZKZ, ZKK\}\,]} \\
&= \frac{\frac{1}{8}+\frac{1}{8}}{\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}} \\
&= \frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

c) Ein Zufallsexperiment ist gleichverteilt, wenn $Pr[\,\omega\,] = \frac{1}{||\Omega||}$ für alle $\omega \in \Omega$ gilt. Dies ist bei diesem Zufallsexperiment *nicht* der Fall, denn:

$$Pr[\,KZK\,] = \frac{1}{8} \neq \frac{1}{4} = Pr[\,KK\,].$$

Das Experiment ist also kein Laplace-Experiment.

**Aufgabe 3.** $(7 + 3 = 10$ Punkte)

a) Dichte und Verteilung der Zufallsvariable $X$:

| $x$ | $Pr[\,X = x\,]$ | $Pr[\,X \leq x\,]$ |
|---|---|---|
| 1 | $\frac{10}{100}$ | $\frac{10}{100}$ |
| 3 | $\frac{40}{100}$ | $\frac{50}{100}$ |
| 4 | $\frac{3}{100}$ | $\frac{53}{100}$ |
| 7 | $\frac{44}{100}$ | $\frac{97}{100}$ |
| 20 | $\frac{3}{100}$ | $\frac{100}{100}$ |

b) Erwartungswert von $X$:

$$
\begin{aligned}
Exp[\,X\,] &= 1 \cdot \frac{10}{100} + 3 \cdot \frac{40}{100} + 4 \cdot \frac{3}{100} + 7 \cdot \frac{44}{100} + 20 \cdot \frac{3}{100} \\
&= 5.1
\end{aligned}
$$

**Aufgabe 4.** $(5 + 5 + 5 = 15$ Punkte)

Ereignisse:

- $M \rightsquigarrow$ „Das Kind ist ein Mädchen."
- $S \rightsquigarrow$ „Das Kind hat eine Rot-Grün-Sehschwäche."

a) Wahrscheinlichkeiten:

- $Pr[\,M\,] = 0.49$
- $Pr\left[\,\overline{M}\,\right] = 0.51$
- $Pr[\,S \mid M\,] = 0.008$
- $Pr\left[\,S \mid \overline{M}\,\right] = 0.09$

b) Satz der totalen Wahrscheinlichkeit:

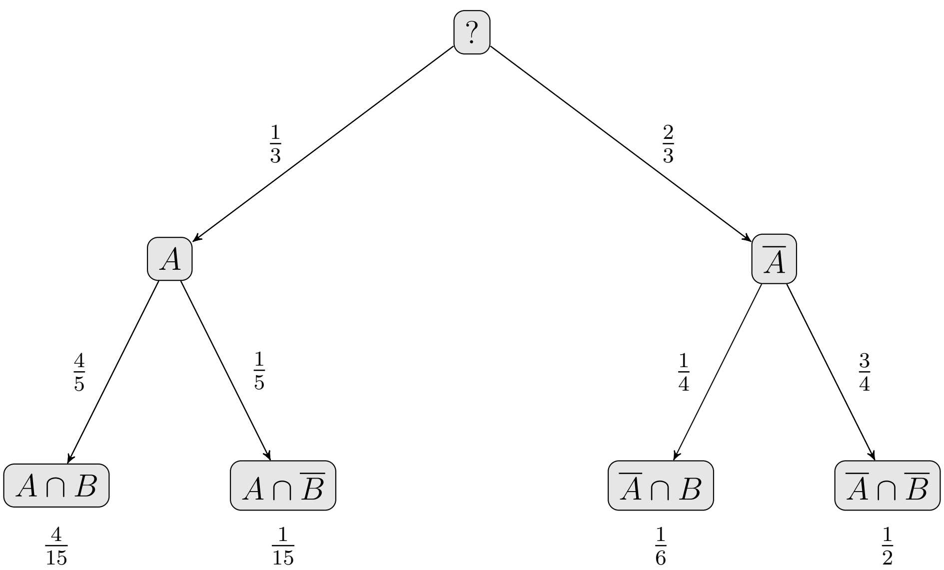
$$\begin{aligned} Pr[\,S\,] &= Pr[\,S \mid M\,] \cdot Pr[\,M\,] + Pr\left[\,s \mid \overline{M}\,\right] \cdot Pr\left[\,\overline{M}\,\right] \\ &= 0.008 \cdot 0.49 + 0.09 \cdot 0.51 \\ &= 0.04982 \end{aligned}$$

c) Satz von Bayes:

$$\begin{aligned} Pr[\,M \mid S\,] &= \frac{Pr[\,S \mid M\,] \cdot Pr[\,M\,]}{Pr[\,S\,]} \\ &= \frac{0.008 \cdot 0.49}{0.04982} \\ &\approx 0.078683 \end{aligned}$$

**Aufgabe 5.** $(5 + 5 + 5 + 5 + 5 = 25$ Punkte)

Der vollständige Entscheidungsbaum ist:



a) Berechnung von $Pr\left[\,B\,\right]$:

$$\begin{aligned} Pr\left[\,B\,\right] &= Pr\left[\,A \cap B\,\right] + Pr\left[\,\overline{A} \cap B\,\right] \\ &= \frac{4}{15} + \frac{1}{6} \\ &= \frac{13}{30} \end{aligned}$$

b) Berechnung von $Pr\left[\,\overline{B} \mid \overline{A}\,\right]$:

$$\begin{aligned} Pr\left[\,\overline{B} \mid \overline{A}\,\right] &= 1 - Pr\left[\,B \mid \overline{A}\,\right] \\ &= 1 - \frac{1}{4} \\ &= \frac{3}{4} \end{aligned}$$

c) Berechnung von $Pr\left[\,\overline{A}\,\right]$:

$$\begin{aligned} Pr\left[\,\overline{A}\,\right] &= \frac{Pr\left[\,\overline{A} \cap B\,\right]}{Pr\left[\,B \mid \overline{A}\,\right]} \\ &= \frac{1/6}{1/4} \\ &= \frac{2}{3} \end{aligned}$$

d) Berechnung von $Pr\left[\,A \cap \overline{B}\,\right]$:

$$\begin{aligned} Pr\left[\,\overline{A} \cap \overline{B}\,\right] &= Pr\left[\,\overline{B} \mid \overline{A}\,\right] \cdot Pr\left[\,\overline{A}\,\right] \\ &= \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{2} \\ Pr\left[\,A \cap \overline{B}\,\right] &= 1 - Pr\left[\,A \cap B\,\right] - Pr\left[\,\overline{A} \cap B\,\right] - Pr\left[\,\overline{A} \cap \overline{B}\,\right] \\ &= 1 - \frac{4}{15} - \frac{1}{6} - \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{15} \end{aligned}$$

e) Die Ereignisse $A$ und $B$ sind unabhängig, falls $Pr\left[\,A \cap B\,\right] = Pr\left[\,A\,\right] \cdot Pr\left[\,B\,\right]$. Dies ist nicht der Fall, denn

$$Pr\left[\,A \cap B\,\right] = \frac{4}{15} \neq \frac{1}{3} \cdot \frac{13}{30} = Pr\left[\,A\,\right] \cdot Pr\left[\,B\,\right].$$

**Aufgabe 6.** $(5 + 5 = 10$ Punkte)

a) Ungleichung von Markov:

$$Pr\,[\,X \geq 400\,] \leq \frac{200}{400} = \frac{1}{2}$$

b) Ungleichung von Chebyshev:

$$Pr\,[\,|X - 200| \geq 200\,] \leq \frac{50^2}{200^2} = \frac{2500}{40000} = 0.0625$$

**Aufgabe 7.** (10 Punkte)

Gegeben ist die Zufallsvariable $X \sim \mathcal{N}(-2, 49)$. Also ist $\mu = -2$ und $\sigma = 7$. Betrachte die Zufallsvariable $Y = \frac{X+2}{7}$. Es gilt: $Y \sim \mathcal{N}(0, 1)$. Durch Umformen erhält man $X = 7Y - 2$.

$$\begin{aligned}
Pr\,[\,-4 \leq X \leq -1\,] &= Pr\,[\,X \leq -1\,] - Pr\,[\,X \leq -4\,] \\
&= Pr\,[\,7Y - 2 \leq -1\,] - Pr\,[\,7Y - 2 \leq -4\,] \\
&= Pr\,[\,Y \leq {}^1\!/_7\,] - Pr\,[\,Y \leq -{}^2\!/_7\,] \\
&= \Phi({}^1\!/_7) - \Phi(-{}^2\!/_7) \\
&= \Phi({}^1\!/_7) - 1 + \Phi({}^2\!/_7) \\
&\approx \Phi(0.14) - 1 + \Phi(0.29) \\
&= 0.555670 - 1 + 0.614092 \\
&= 0.169762
\end{aligned}$$