# Berechenbarkeits- und Komplexitätstheorie

## Lerneinheit 6: Weitere NP-vollständige Probleme

Prof. Dr. Christoph Karg

Studiengang Informatik
Hochschule Aalen


Wintersemester 2015/2016

22.12.2015

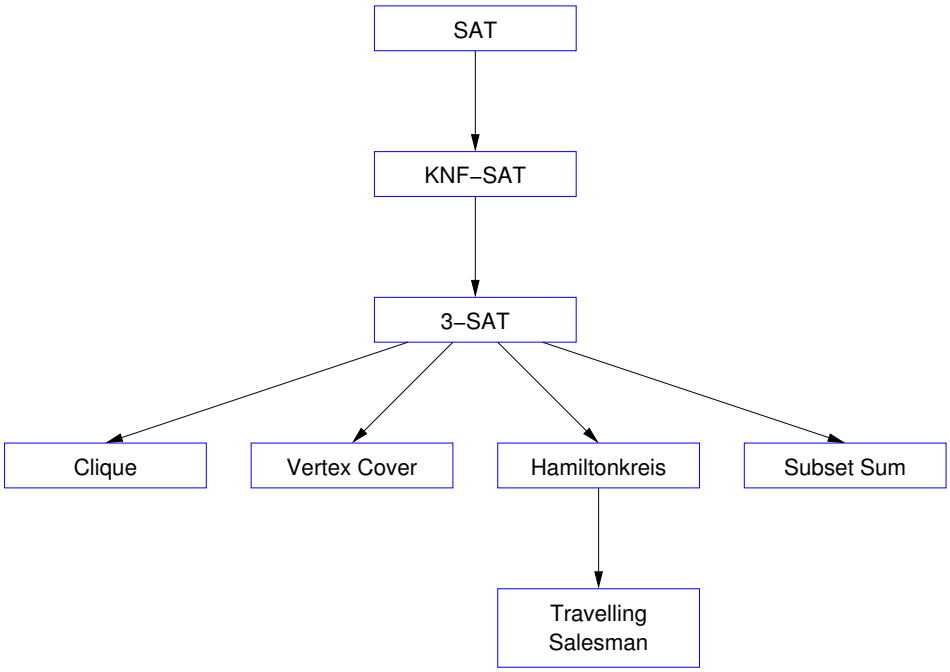
# Einleitung

In dieser Lerneinheit werden weitere NP-vollständige Probleme vorgestellt.

Konkret wird nachgewiesen, dass die folgenden Sprachen NP-vollständig sind:

- Clique
- Vertex Cover
- Subset Sum
- Hamiltonkreis
- Travelling Salesman

# Übersicht






# Clique

**Definition.** Sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter Graph. Sei $C \subseteq V$ eine Teilmenge der Knoten. $C$ ist eine Clique, falls für jedes Paar von Knoten $u, v \in C$ gilt, dass $(u, v) \in E$ ist.

Clique
**Gegeben:**

- Ungerichteter Graph $G = (V, E)$
- Ganze Zahl $k \in \{1, \ldots, n\}$

**Gefragt:** Besitzt $G$ eine Clique $C$ der Größe $k$?

## Verifikationsalgorithmus für Clique

CheckClique($\langle G, k \rangle, C$)
**Input:** Ungerichteter Graph $G = (V, E)$, Zahl $k \in \{1, \ldots, \|V\|\}$, Knotenmenge $C \subseteq V$
**Output:** `true`, falls $C$ eine Clique der Größe $k$ ist, `false`, sonst.

```
1 if ||C|| ≠ k then
2   return false
3 else
4   for jeden Knoten u ∈ C do
5     for jeden Knoten v ∈ C do
6     if (u, v) ∉ E then
7       return false
8   return true
```



## Clique ist NP-vollständig

**Satz.** Clique ist NP-vollständig

*Beweis.* Clique $\in$ NP: ✓

Clique ist NP-hart: Betrachte die Formel:

$$F = (\ell_1^1 \vee \ell_2^1 \vee \ell_3^1) \wedge \ldots \wedge (\ell_1^k \vee \ell_2^k \vee \ell_3^k),$$

wobei die $\ell_j^i$'s Literale sind
Der Graph $G_F = (V, E)$ wird wie folgt berechnet:

Die Knotenmenge $V$ enthält für jedes Literal einen Knoten:

$$V = \{v_1^1, v_2^1, v_3^1, \ldots, v_1^k, v_2^k, v_3^k\}$$

# Clique ist NP-vollständig (Forts.)

Die Knoten $v_i^r$ und $v_j^s$ sind durch eine Kante verbunden genau dann, wenn

- $r \neq s$, d.h., die Literale stammen aus verschiedenen Klauseln,
- $\ell_i^r \neq \neg \ell_j^s$, d.h., die Literale sind konsistent.

Aufwand zur Konstruktion des Graphen: $O(|F|^2)$

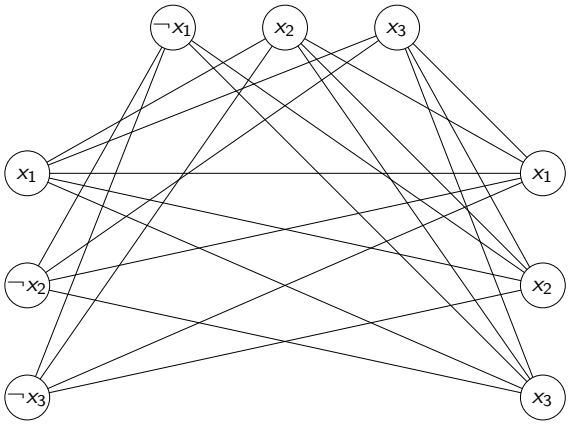


# Clique ist NP-vollständig (Forts.)

**Beispiel:** Gegeben ist die Formel

$$F = (x_1 \vee \neg x_2 \vee \neg x_3) \wedge (\neg x_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge (x_1 \vee x_2 \vee x_3)$$

Der zugehörige Graph ist:



## Clique ist NP-vollständig (Forts.)

Behauptung: $F$ ist erfüllbar genau dann, wenn $G_F$ eine Clique der Größe $k$ besitzt

"$\Rightarrow$": Angenommen, $F$ ist erfüllbar.

Dann existiert eine Belegung, unter der in jeder Klausel mindestens ein Literal wahr wird.

Angenommen, die Belegung macht die Literale $\ell^1_{j_1}, \ldots, \ell^k_{j_k}$ wahr, wobei $j_i \in \{1,2,3\}$ für $i = 1, \ldots, k$.

Für alle $r, s$ mit $r \neq s$ gilt: $\ell^r_{j_r}$ und $\ell^s_{j_s}$ sind konsistent.

Also sind $v^r_{j_r}$ und $v^s_{j_s}$ durch eine Kante verbunden.

Folglich ist $C = \{v^1_{j_1}, \ldots, v^k_{j_k}\}$ eine Clique der Größe $k$



## Clique ist NP-vollständig (Forts.)

"$\Leftarrow$": Angenommen, $v^{i_1}_{j_1}, \ldots, v^{i_k}_{j_k}$ bilden eine Clique, wobei $i_p \in \{1, \ldots, k\}$ und $j_p \in \{1,2,3\}$ für alle $p = 1, \ldots, k$.

Wegen der Struktur von $G_F$ können keine zwei Knoten aus derselben Klauselgruppe stammen, d.h., $\{i_1, \ldots, i_k\} = \{1, \ldots, k\}$.

Für jedes Paar $v^{i_r}_{j_r}, v^{i_s}_{j_s}$ von Knoten sind die entsprechenden Klauseln $\ell^{i_r}_{j_r}, \ell^{i_s}_{j_s}$ konsistent. Sonst gäbe es keine Kante zwischen $v^{i_r}_{j_r}$ und $v^{i_s}_{j_s}$.

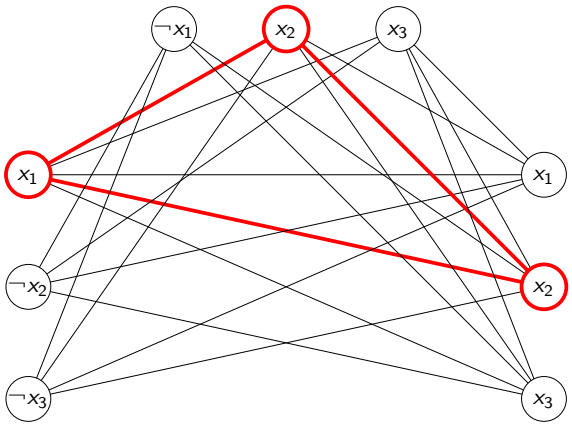
Folglich ist jede Belegung, die die zur Clique korrespondierenden Literale mit 1 belegt, eine erfüllende Belegung für $F$.

# Clique ist NP-vollständig (Forts.)

**Beispiel:** Gegeben ist die Formel

$$F = (x_1 \vee \neg x_2 \vee \neg x_3) \wedge (\neg x_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge (x_1 \vee x_2 \vee x_3)$$

Der zugehörige Graph ist:




$\rightsquigarrow x_1 = 1, x_2 = 1$



# Vertex Cover

**Definition.** Sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter Graph. Sei $C \subseteq V$ eine Teilmenge der Knoten. Falls für alle Kanten $(u, v) \in E$ $u \in C$ oder $v \in C$, dann nennt man $C$ eine Knotenabdeckung (Vertex Cover) von $G$.

Vertex Cover (VC)
**Gegeben:**

- Ungerichteter Graph $G = (V, E)$
- Ganze Zahl $k \in \{1, \ldots, n\}$

**Gefragt:** Besitzt $G$ eine Knotenabdeckung $C$ der Größe $k$?

## Verifikationsalgorithmus für Vertex Cover

CheckVertexCover$(\langle G, k\rangle, C)$
**Input:** Ungerichteter Graph $G = (V, E)$, Zahl $k \in \{1, \ldots, \|V\|\}$, Knotenmenge $C \subseteq V$
**Output:** `true`, falls $C$ eine Knotenabdeckung der Größe $k$ ist, `false`, sonst.

```
1 if ‖C‖ ≠ k then
2   return false
3 else
4   for jede Kante (u, v) ∈ E do
5     if u ∉ C and v ∉ C then
6       return false
7   return true
```



## Vertex Cover ist NP-vollständig

**Satz.** VC ist NP-vollständig

*Beweis.* VC $\in$ NP: ✓

VC ist NP-hart: Reduktion von 3-SAT auf VC

Betrachte die Formel

$$F = (a_1 \vee b_1 \vee c_1) \wedge \ldots \wedge (a_\ell \vee b_\ell \vee c_\ell)$$

über den Variablen $x_1, \ldots, x_m$

# Vertex Cover ist NP-vollständig (Forts,)

Graph $G_F = (V_F, E_F)$:

Knoten:

- Variablenknoten $V[x_1], \ldots, V[x_m], V[\neg x_1], \ldots, V[\neg x_m]$
- Klauselknoten $C[a_1], C[b_1], C[c_1], \ldots, C[a_\ell], C[b_\ell], C[c_\ell]$

Insgesamt: $2m + 3\ell$ Knoten

Kanten:

- $(V[x_i], V[\neg x_i])$ für alle $i = 1, \ldots, m$
- $(C[a_i], C[b_i])$, $(C[b_i], C[c_i])$, $(C[c_i], C[a_i])$ für alle $i = 1, \ldots, \ell$
- $(C[a_i], V[a_i])$, $(C[b_i], V[b_i])$, $(C[c_i], V[c_i])$ für alle $i = 1, \ldots, \ell$

Insgesamt: $m + 3\ell$ Kanten

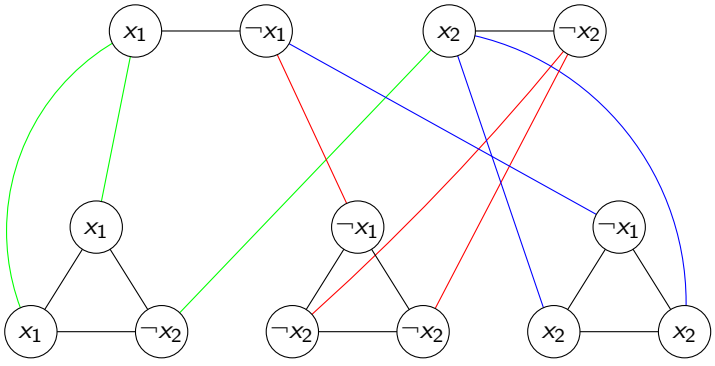


# Vertex Cover ist NP-vollständig (Forts,)

**Beispiel:** Betrachte die Formel

$$F = (x_1 \vee x_1 \vee x_2) \wedge (\neg x_1 \vee \neg x_2 \vee \neg x_2) \wedge (\neg x_1 \vee x_2 \vee x_2)$$

Der zugehörige Graph $G_F$ ist:



## Vertex Cover ist NP-vollständig (Forts,)

Behauptung: $F$ ist erfüllbar genau dann, wenn $G_F$ eine Knotenabdeckung der Größe $k = m + 2\ell$ besitzt

"$\Rightarrow$": Angenommen, $F$ ist erfüllbar.

Die Menge $C$ wird wie folgt gebildet:

- Für alle $i = 1, \ldots, m$: Falls $x_i = 1$, dann füge $x_i$ zu $C$ hinzu. Ansonsten füge $\neg x_i$ zu $C$ hinzu
- Für $j = 1, \ldots, \ell$: Streiche aus der Menge $\{C[a_j], C[b_j], C[c_j]\}$ einen Knoten, dessen Literal wahr ist, und füge die restlichen beiden zu $C$ hinzu

Es gilt: $C$ ist eine Knotenüberdeckung mit $m + 2\ell$ Knoten



## Vertex Cover ist NP-vollständig (Forts,)

"$\Leftarrow$": Sei $C$ eine Knotenüberdeckung mit $m + 2\ell$ Knoten

Eigenschaften:

- $C$ enthält entweder $V[x_i]$ oder $V[\neg x_i]$ für alle $i = 1, \ldots, m$
- $C$ enthält genau zwei Knoten der Menge $\{C[a_j], C[b_j], C[c_j]\}$ für alle $j = 1, \ldots, \ell$

Betrachte die Belegung

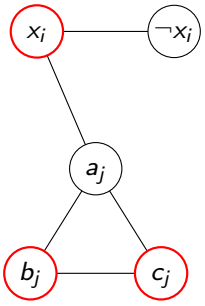
$$x_i = \begin{cases} 1 & \text{falls } V[x_i] \in C, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

für $i = 1, \ldots, m$

# Vertex Cover ist NP-vollständig (Forts,)

Betrachte den Teilgraph $\{C[a_j], C[b_j], C[c_j]\}$.

Da nur zwei der Knoten in $C$ enthalten sind, muss eine der "Variablenkanten" durch einen Variablenknoten abgedeckt sein.




Das entsprechende Literal wurde mit 1 belegt und erfüllt die Klausel $(a_j \vee b_j \vee c_j) \rightsquigarrow F$ ist erfüllbar

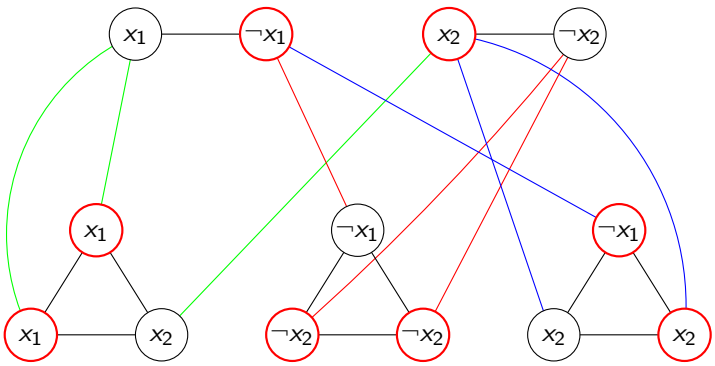


# Vertex Cover ist NP-vollständig (Forts,)

Zurück zum **Beispiel**:

$$F = (x_1 \vee x_1 \vee x_2) \wedge (\neg x_1 \vee \neg x_2 \vee \neg x_2) \wedge (\neg x_1 \vee x_2 \vee x_2)$$

Graph $G_F$:




Erfüllende Belegung $x_1 = 0$, $x_2 = 1$

## Vertex Cover ist NP-vollständig (Forts,)

Die Reduktionsfunktion bildet eine Formel $F$ mit $m$ Variablen und $\ell$ Klauseln ab in den Graphen $G_F = (V_F, E_F)$ und die Zahl $k = m + 2\ell$

Die Reduktion ist in Zeitkomplexität $O(|F|^2)$ durchführbar

Ergebnis: 3-SAT $\leq_m^p$ VC



## Subset Sum

Subset Sum

**Gegeben:**

- Folge von Zahlen $a_1, \ldots, a_n$, wobei $a_i \in \mathbb{Z}$ für $i = 1, \ldots, n$
- Zahl $b \in Z$

**Gefragt:**

- Gibt es eine Teilmenge $I \subseteq \{1, \ldots, n\}$ mit $\sum_{i \in I} a_i = b$?

## Verifikationsalgorithmus für Subset Sum

CheckSubsetSum$(\langle a_1, \ldots, a_n, b\rangle, I)$
**Input:** Folge von Zahlen $a_1, \ldots, a_n$, Zahl $b \in \mathbb{Z}$,
Menge $I \subseteq \{1, \ldots, n\}$
**Output:** `true`, falls $\sum_{i \in I} a_i = b$, `false`, sonst.

```
1 s := 0
2 for jeden Index i ∈ I do
3     s := s + a_i
4 if (s = b) then
5     return true
6 else
7     return false
```



## SubsetSum ist NP-vollständig

**Satz.** SubsetSum ist NP-vollständig

*Beweis.* SubsetSum $\in$ NP: ✓

SubsetSum ist NP-hart: Reduktion von 3-SAT auf SubsetSum

# SubsetSum ist NP-vollständig (Forts.)

**Beispiel**: Gegeben ist die Formel

$$F = (x_1 \vee \neg x_3 \vee x_5) \wedge (\neg x_1 \vee x_5 \vee x_4) \wedge (\neg x_2 \vee \neg x_2 \vee \neg x_5)$$

Subset Sum Problem: Alle Zahlen haben $5 + 3 = 8$ Stellen

| *Zahl* | *Variablen* | | | | | *Klauseln* | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 1 | 2 | 3 |
| $y_1$ | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| $z_1$ | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| $y_2$ | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| $z_2$ | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| $y_3$ | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| $z_3$ | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |



# SubsetSum ist NP-vollständig (Forts.)

| *Zahl* | *Variablen* | | | | | *Klauseln* | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 1 | 2 | 3 |
| $y_4$ | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| $z_4$ | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| $y_5$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 |
| $z_5$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| $g_1$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| $h_1$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| $g_2$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| $h_2$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| $g_3$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| $h_3$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| $b$ | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 3 | 3 | 3 |

## SubsetSum ist NP-vollständig (Forts.)

Sei $F = C_1 \wedge \ldots \wedge C_k$ eine Formel in 3-KNF mit den Variablen $x_1, \ldots, x_n$.

Berechnung der Eingabe für Subset Sum:

- Es werden ausschließlich Dezimalzahlen mit $k + n$ Stellen konstruiert
- Notation: $a[j]$ steht für die $j$-te Stelle von $a = a_1 \ldots a_{k+n}$

Aufbau der Zahlen $g_i$ und $h_i$ für $i = 1, \ldots, k$:

Für $1 \leq j \leq n$: $g_i[j] = 0$, $h_i[j] = 0$

Für $1 \leq \ell \leq k$:

$$g_i[n+\ell] = \begin{cases} 1 & i = \ell, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \qquad h_i[n+\ell] = \begin{cases} 1 & i = \ell, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$



## SubsetSum ist NP-vollständig (Forts.)

Aufbau der Zahlen $y_i$ und $z_i$ für $i = 1, \ldots, n$:

Für $1 \leq j \leq n$:

$$y_i[j] = \begin{cases} 1 & i = j, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \qquad z_i[j] = \begin{cases} 1 & i = j, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Für $1 \leq \ell \leq k$:

$$y_i[n+\ell] = \begin{cases} 1 & x_i \in C_\ell, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \qquad z_i[n+\ell] = \begin{cases} 1 & \neg x_i \in C_\ell, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Aufbau der Zahl $b$:

$$b = \underbrace{11\ldots1}_{n\text{-mal}}\underbrace{33\ldots3}_{k\text{-mal}}$$

## SubsetSum ist NP-vollständig (Forts.)

Behauptung: $F$ ist erfüllbar genau dann, wenn $y_1, z_1, \ldots, y_n, z_n, g_1, h_1, \ldots, g_\ell, h_\ell, b)$ lösbar ist

"$\Rightarrow$": Angenommen, $F$ ist erfüllbar. Dann gibt es eine Belegung der Variablen, die in jeder Klausel mindestens ein Literal wahr macht

Auswahl der Zahlen:

- Für alle $1 \leq j \leq n$: Falls $x_j = 1$, dann füge $y_j$ zu $T$ hinzu. Ansonsten füge $z_j$ zu $T$ hinzu.
- Für alle $1 \leq \ell \leq k$:
  - Falls die Anzahl der wahren Literale in $C_\ell$ gleich 1 ist, dann füge $g_\ell$ und $h_\ell$ zu $T$ hinzu
  - Falls die Anzahl der wahren Literale in $C_\ell$ gleich 2 ist, dann füge $g_\ell$ zu $T$ hinzu

Es gilt: $\sum_{a \in T} a = b$



## SubsetSum ist NP-vollständig (Forts.)

"$\Leftarrow$": Angenommen, es gibt eine Menge $T \subseteq S$, so dass $\sum_{a \in T} a = b$.

Es gilt:

- Bei der Addition der Zahlen in $S$ gibt es keine Überträge
- Wegen dem Aufbau von $b$ muss entweder $y_i$ oder $z_i$ in $T$ enthalten sein, wobei $i = 1, \ldots, n$
- Falls $y_i \in T$, dann setze $x_i = 1$. Ansonsten, setze $x_i$ auf 0
- $g_\ell$ und $h_\ell$ reichen nicht aus, um in der Spalte $n + \ell$ den Wert 3 zu erzielen. Daher muss es für jede Klausel-Spalte mindestens eine $y$- oder $z$-Zahl in $T$ geben, deren Ziffer in Spalte $n + \ell$ gleich 1 ist. Das entsprechende Literal erfüllt die Klausel $C_\ell$

Fazit: $F$ ist erfüllbar

# SubsetSum ist NP-vollständig (Forts.)

**Beispiel**: Gegeben ist die Formel

$$F = (x_1 \vee \neg x_3 \vee x_5) \wedge (\neg x_1 \vee x_5 \vee x_4) \wedge (\neg x_2 \vee \neg x_2 \vee \neg x_5)$$

Lösung für Subset Sum Problem:

| *Zahl* | *Variablen* | | | | | *Klauseln* | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 1 | 2 | 3 |
| $y_1$ | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| $z_2$ | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| $y_3$ | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| $z_4$ | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| $y_5$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 |



# SubsetSum ist NP-vollständig (Forts.)

| *Zahl* | *Variablen* | | | | | *Klauseln* | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 1 | 2 | 3 |
| $g_1$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| $g_2$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| $h_2$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| $g_3$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| $h_3$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| $\Sigma$ | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 3 | 3 | 3 |

Belegung: $x_1 = 1$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1$, $x_4 = 0$, $x_5 = 1$

## Gerichteter Hamiltonkreis

**Definition.** Sei $G = (V, E)$ ein gerichteter Graph. Ein Hamiltonkreis in $G$ ist ein Zyklus, auf dem jeder Knoten in $V$ genau einmal vorkommt.

Gerichteter Hamiltonkreis (DHAM)
**Gegeben:**

- Gerichteter Graph $G = (V, E)$, wobei $\|V\| = n$

**Gefragt:**

- Besitzt $G$ einen Hamiltonkreis? Formal: Gibt es eine Knotenreihenfolge $v_0, v_1, v_2, \ldots, v_n$ mit:
  - $v_0 = v_n$
  - Für alle $1 \leq i, j \leq n$ gilt: Falls $i \neq j$, dann ist $v_i \neq v_j$
  - Für alle $i = 1, \ldots, n$ gilt: $(v_{i-1}, v_i) \in E$



## Verifikationsalgorithmus für DHAM

CheckHamiltonCircuit$(G, H)$
**Input:** Gerichteter Graph $G = (V, E)$, wobei $n = \|V\|$
Knotenfolge $H = (v_0, v_1, \ldots, v_n)$
**Output:** `true`, falls $H$ ein Hamiltonkreis in $G$ ist, `false`, sonst.

```
1  if v_0 ≠ v_n then
2    return false
3  for i := 1 to n − 1 do
4    for j := 2 to n do
5      if v_i = v_j then
6        return false
7  for i := 1 to n do
8    if (v_{i−1}, v_i) ∉ E then
9      return false
10 return true
```

# DHAM ist NP-vollständig

**Satz.** DHAM ist NP-vollständig

*Beweis.* DHAM $\in$ NP: ✓

DHAM ist NP-hart: Reduktion von 3-SAT auf DHAM

Gegeben ist die Formel

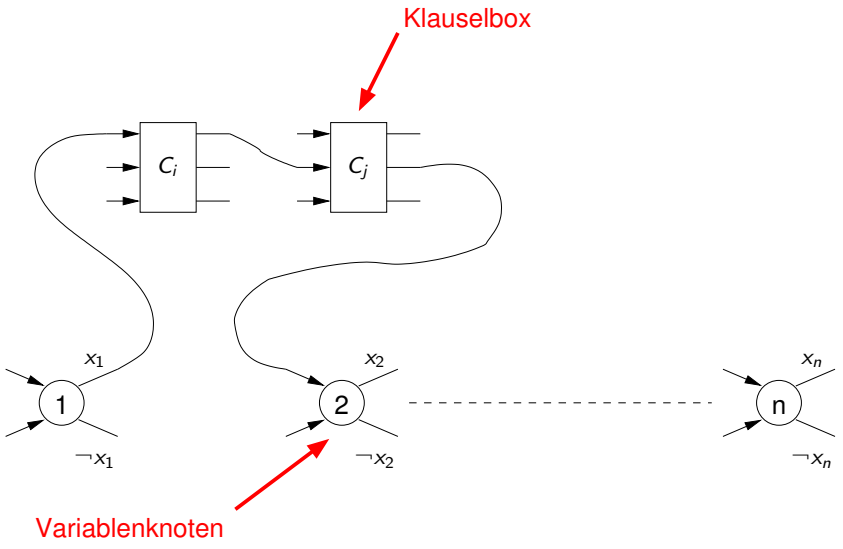
$$F = (\ell_1^1 \vee \ell_2^1 \vee \ell_3^1) \wedge \ldots \wedge (\ell_1^k \vee \ell_2^k \vee \ell_3^k),$$

über den Variablen $x_1, \ldots, x_n$



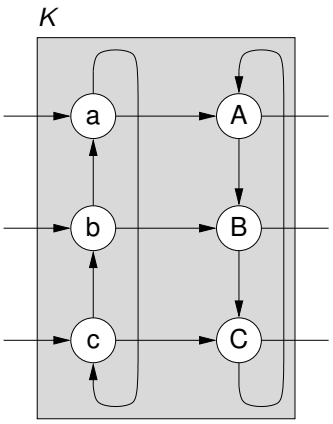
# DHAM ist NP-vollständig (Forts.)

Aufbau des Graphen:



# DHAM ist NP-vollständig (Forts.)

Aufbau einer Klauselbox:




Pro Klausel enthält $G$ eine Klauselbox



# DHAM ist NP-vollständig (Forts.)

Behauptung: Angenommen, der eine Klauselbox $K$ umgebende Graph besitzt einen Hamiltonkreis. Dann durchläuft der Pfad den Teilgraph $K$ folgendermaßen: wenn der Pfad bei $a$ (bzw. $b$, $c$) in $K$ hineinführt, dann verlässt er $K$ bei $A$ (bzw. $B$, $C$).

*Beweis.* Angenommen, der Hamiltonkreis beginnt bei $a$, verlässt $K$ jedoch nicht beim Knoten $A$.

Fallunterscheidung:

- $a \to A \to B$: Sackgasse bei $b$
- $a \to A \to B \to C$: Sackgasse bei $b$
- $a \to c \to C$: $A$ nicht mehr erreichbar

# DHAM ist NP-vollständig (Forts.)

- $a \to c \to b \to B$: $A$ und $C$ nicht mehr erreichbar
- $a \to c \to b \to B \to C$: $A$ nicht mehr erreichbar
- $a \to c \to C \to A \to B$: Sackgasse bei $b$

Analog für die Startknoten $b$ und $c$

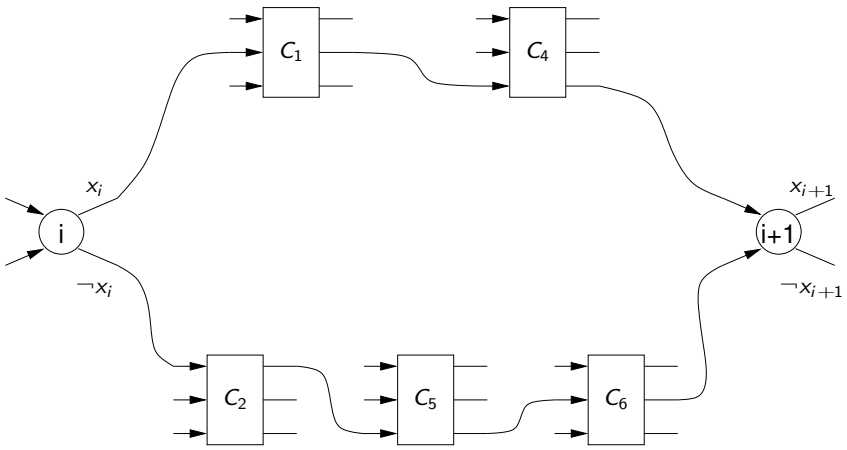
Bemerkung: Zulässige Pfade durch $K$ mit Startknoten $a$:

- $a \to A$
- $a \to c \to C \to A$
- $a \to c \to b \to B \to C \to A$

Analog für die Startknoten $b$ und $c$



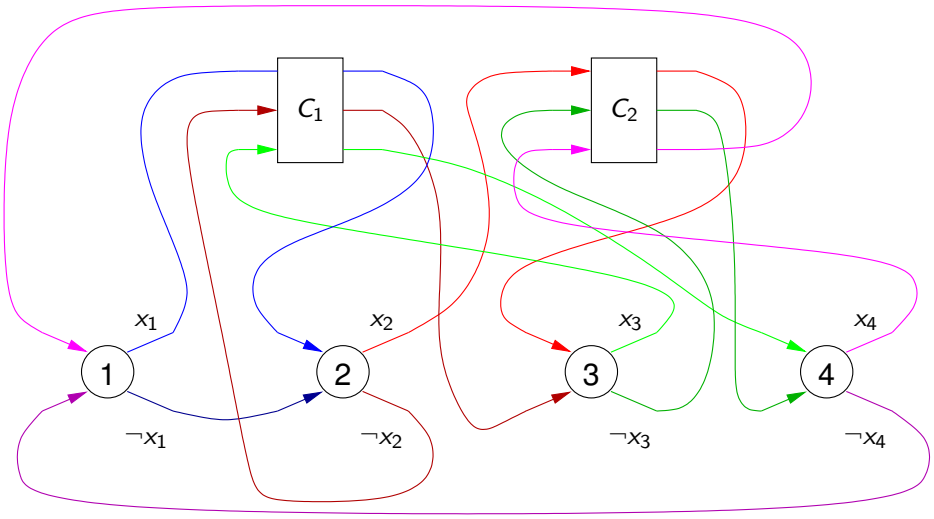
# DHAM ist NP-vollständig (Forts.)




Der Ausgangspfad vom Knoten $i$ für $x_i$ durchläuft alle Klauselboxen, die $x_i$ enthalten und endet im "oberen" Eingang von $i+1$. Analog für den Pfad für $\neg x_i$

# DHAM ist NP-vollständig (Forts.)

**Beispiel:** $F = (x_1 \vee \neg x_2 \vee x_3) \wedge (x_2 \vee \neg x_3 \vee x_4)$






# DHAM ist NP-vollständig (Forts.)

Behauptung: $F$ ist erfüllbar genau dann, wenn $G$ einen Hamiltonkreis besitzt

*Beweis.* Angenommen, $F$ ist erfüllbar.

Betrachte den Pfad, der anhand einer erfüllenden Belegung konstruiert wird:

Für $i = 1, \ldots, n$ führe folgende Schritte durch:

- Wenn $x_i = 1$, dann folge ausgehend vom Knoten $i$ dem "oberen" Pfad. Ansonsten, folge dem "unteren" Pfad
- Durchlaufe alle Klauseln $C_j$, die $x_i$ (oberer Pfad) bzw. $\neg x_i$ (unterer Pfad) enthalten. Jede Klauselbox wird so durchlaufen, dass die Anzahl der Durchläufe gleich der Anzahl der wahren Literale ist

# DHAM ist NP-vollständig (Forts.)

- Nach dem Durchlaufen der Klauselboxen führe den Pfad in den "oberen" (bzw. "unteren") Eingang des Knotens $(i+1)$ mod $n$

Insgesamt werden in jeder Klauselbox alle Knoten sowie die Knoten $1, \ldots, n$ durchlaufen. $G$ besitzt also einen Hamiltonkreis

"$\Leftarrow$": Angenommen, $G$ besitzt einen Hamiltonkreis.

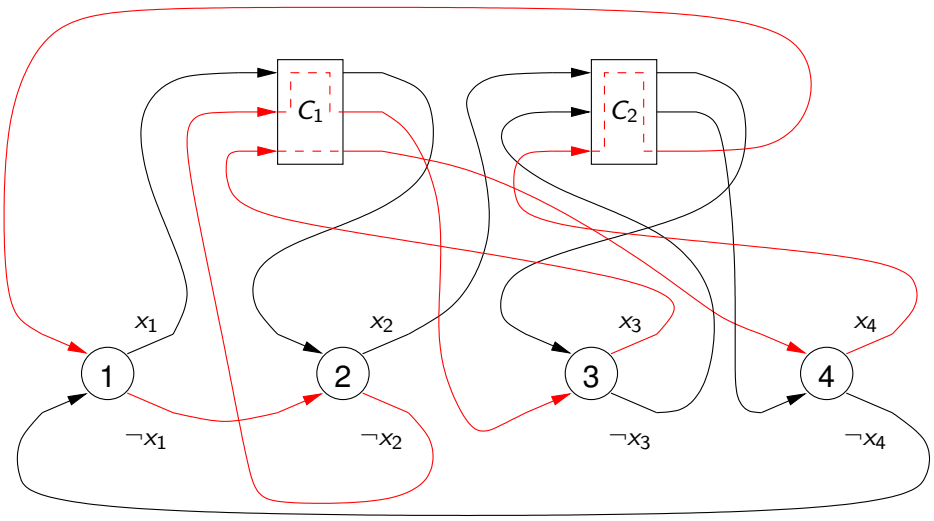
Die Variable $x_i$ wird mit 1 belegt, wenn der Hamiltonkreis den Knoten $i$ auf dem "oberen" Pfad verlässt. Ansonsten erhält $x_i$ den Wert 0

Wegen des Aufbaus des Graphen ist die Belegung erfüllend für die Formel $F$.



# DHAM ist NP-vollständig (Forts.)

**Beispiel:** Hamiltonkreis:




Erfüllende Belegung: $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1$, $x_4 = 1$

# Ungerichteter Hamiltonkreis

Ungerichteter Hamiltonkreis (UHAM)

**Gegeben:**

- Ungerichteter Graph $G = (V, E)$

**Gefragt:**

- Besitzt $G$ einen Hamiltonkreis? Formal: Gibt es eine Knotenriehenfolge $v_0, v_1, v_2, \ldots, v_n$ mit:
  - $v_0 = v_n$
  - Für alle $1 \leq i, j \leq n$ gilt: Falls $i \neq j$, dann ist $v_i \neq v_j$
  - Für alle $i = 1, \ldots, n$ gilt: $(v_{i-1}, v_i) \in E$



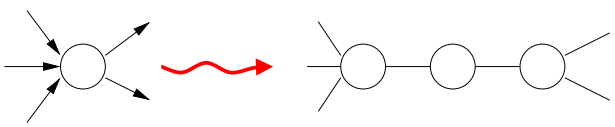
# UHAM ist NP-vollständig

**Satz.** UHAM ist NP-vollständig

*Beweis.* UHAM $\in$ NP: analog zu DHAM $\in$ NP

UHAM ist NP-hart: DHAM $\leq_m^p$ UHAM

Betrachte einen gerichteten Graphen $G$. Jeder Knoten in $G$ wird im ungerichteten Graphen $G'$ wie folgt dargestellt: durch:



Es gilt: $G$ besitzt einen Hamiltonkreis genau dann, wenn $G'$ einen Hamiltonkreis besitzt

# Travelling Salesman Problem

Travelling Salesman Problem (TSP)
**Gegeben:**

- $n \times n$-Matrix $M_{i,j}$ von Entfernungen zwischen $n$ Städten
- Ganze Zahl $k$

**Gefragt:** Gibt es eine Rundreise der Länge $\leq k$?
Formal: Gibt es eine Permutation $\pi$ so dass

$$\sum_{i=1}^{n-1} M_{\pi(i),\pi(i+1)} + M_{\pi(n),\pi(1)} \leq k?$$



# TSP ist NP-vollständig

**Satz.** TSP ist NP-vollständig

*Beweis.* TSP $\in$ NP: ✓

TSP ist NP-hart: UHAM $\leq_m^p$ TSP

Betrachte den ungerichteten Graphen $G = (V, E)$, wobei $V = \{1, \ldots, n\}$
Die Matrix $M_{i,j}$ ist wie folgt definiert:

$$M_{i,j} = \begin{cases} 1 & (i,j) \in E \\ 2 & (i,j) \notin E \end{cases}$$

Es gilt: $G$ besitzt einen Hamiltonkreis genau dann, wenn es für $M_{i,j}$ eine Rundreise der Länge $k = n$ gibt

# Zusammenfassung

- Die NP-vollständigen Probleme sind die schwierigsten Probleme in NP
- Falls es für eines der NP-vollständigen Probleme einen Polynomialzeit Algorithmus gibt, dann ist P = NP
- NP-vollständige Probleme findet man in allen Gebieten der Informatik
- Für weitere Informationen siehe: Garey , Johnson: Computers And Intractability — A Guide to the Theory of NP-Completeness