# Berechenbarkeits- und Komplexitätstheorie

## Lerneinheit 5: Die Klasse NP

Prof. Dr. Christoph Karg

Studiengang Informatik
Hochschule Aalen


Wintersemester 2015/2016

26.9.2015

# Einleitung

Thema dieser Lerneinheit ist die Klasse NP. Diese Klasse enthält viele für die Praxis relevante Probleme, für die bis heute kein effizienter Algorithmus bekannt ist.

Die Lerneinheit gliedert sich in:

- Definition von NP
- Berechnung von Lösungen mittels Entscheidungsproblemen
- Effizient verifizierbare Probleme
- NP-Vollständigkeit

## Die Klasse NP

**Definition.** Die Klasse NP enthält alle Sprachen, die durch eine nichtdeterministische, polynomial zeitbeschränkte Turing Maschine akzeptierbar sind. Formal:

$$\mathrm{NP} = \bigcup_{k=0}^{\infty} \mathrm{NTIME}(n^k)$$

**Bemerkungen.**

- Die Klasse NP enthält viele für die Praxis relevante Probleme
- Es gilt: $\mathrm{P} \subseteq \mathrm{NP}$
- Es ist nicht bekannt, ob alle Sprachen in NP effizient lösbar sind



## Berechnung von Lösungen

Ziel: Einsatz eines Entscheidungsproblems zur Berechnung einer Lösung

**Beispiel:** Erfüllbarkeit von aussagenlogischen Formeln (SAT)

*Gegeben*: Aussagenlogische Formel $F$ über den Variablen $x_1, \ldots, x_n$
*Aufgabe*: Berechne eine erfüllende Belegung für $F$, falls eine solche existiert

Ansatz: Konstruiere eine erfüllende Belegung durch schrittweise Belegung der Variablen $x_1, \ldots, x_n$

## Berechnung von Lösungen (Forts.)

ASSIGNMENT$(F(x_1, \ldots, x_n))$
**Input:** Aussagenlogische Formel $F$ mit den Variablen $x_1, \ldots, x_n$
**Output:** Erfüllende Belegung für $F$, falls eine solche existiert

```
1  if F ∉ SAT then
2    return F ist unerfüllbar
3  else
4    for i := 1 to n do
5      Ersetze in F jedes Vorkommen von x_i durch (x_i ∨ ¬x_i)
       und speichere die resultierende Formel in F'
6      b_i := 1
```



## Berechnung von Lösungen (Forts.)

```
7      if F' ∉ SAT then
8        Ersetze in F jedes Vorkommen von x_i durch (x_i ∧ ¬x_i)
         und speichere die resultierende Formel in F'
9        b_i := 0
10     F := F'
11   return Belegung (b_1, ..., b_n)
```

## Berechnung von Lösungen (Forts.)

Bemerkungen:

- Durch die Belegung der Variablen wird die Länge der Formel in jedem Schritt höchstens verdreifacht
- Die Laufzeit von $\textsc{Assignment}(F(x_1, \ldots, x_n))$ hängt ab von
  - ▷ Umformung der Formel $F$
    $\rightsquigarrow$ Aufwand $O(n \cdot |F|)$
  - ▷ Aufruf des SAT Algorithmus
    $\rightsquigarrow$ Aufwand $O((n+1) \cdot time_{\mathsf{SAT}}(3 \cdot |F|))$
- Ist SAT $\in$ P, dann ist die Berechnung einer erfüllenden Belegung in Polynomialzeit durchführbar



## Effizient verifizierbare Sprachen

**Definition.** Eine Sprache $A$ ist in Polynomialzeit verifizierbar, falls es eine Sprache $B \in P$ und ein Polynom $p : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{N}$ gibt so dass für alle $x \in \Sigma^*$:

$$x \in A \iff \text{es gibt ein } w \text{ mit } |w| \leq p(|x|): \langle x, w \rangle \in B$$

Das Wort $w$ bezeichnet man als Beleg (Beweis, witness) für die Zugehörigkeit von $x$ zur Sprache $A$.

Offensichtlich: Jede Sprache in P ist in Polynomialzeit verifizierbar

## SAT ist effizient verifizierbar

**Beispiel:** die Sprache SAT ist in Polynomialzeit verifizierbar

Ansatz: Erfüllende Belegung ist ein Beleg für $F \in \text{SAT}$

Arbeitsweise des Algorithmus auf Eingabe $\langle F, w \rangle$:

1. Überprüfe, ob $w$ eine Belegung der in $F$ vorkommenden Variablen darstellt
2. Überprüfe, ob $w$ eine erfüllende Belegung für $F$ ist, d.h., ob $\langle F, w \rangle \in \text{CVP}$ ist

Für jede Formel $F$ ist die Belegung in $O(|F|)$ Buchstaben darstellbar. Also gilt: $|w| \leq O(|F|)$.

Das entsprechende Polynom ist $p(n) = c \cdot n$, wobei $c$ die Konstante der $O$-Notation ist



## Effizient verifizierbare Sprachen und NP

**Satz**. Eine Sprache $A$ ist in Polynomialzeit verifzierbar genau dann, wenn $A \in \text{NP}$.

*Beweis.* "$\Leftarrow$": Sei $A$ eine in Polynomialzeit verifizierbare Sprache. Dann existiert eine Sprache $B$ und ein Polynom $p$, welche die Eigenschaften der obigen Definition erfüllen.

Ansatz: Konstruiere nichtdeterministisch ein Wort $w$ der Länge $\leq p(|x|)$ und überprüfe, ob $\langle x, w \rangle \in \text{P}$

## Effizient verifizierbare Sprachen und NP (Forts.)

GuessAndCheck($x$)
**Input:** Wort $x$
**Output:** `true`, falls $x \in A$, `false`, sonst.

```
1  i := 0; w := ε
2  repeat
3     Wähle nichtdeterministsch a ∈ Σ ∪ {⊥}
4     if a ≠ ⊥ then
5        w := wa
6        i := i + 1
7  until i ≥ p(|x|) or a = ⊥
8  if ⟨x, w⟩ ∈ B then
9     return true
10 else
11    return false
```



## Effizient verifizierbare Sprachen und NP (Forts.)

Analyse:

- Der Algorithmus akzeptiert die Eingabe $x$ genau dann, wenn es einen Beleg $w$ gibt, so dass $\langle x, w\rangle \in B$. Folglich akzeptiert der Algorithmus die Sprache $A$
- Laufzeit:
  - ▷ Nichtdeterministische Auswahl von $w$ $\rightsquigarrow O(p(|x|))$
  - ▷ Aufruf des Verifikationsalgorithmus $\rightsquigarrow O(|x|^k)$ für eine Konstante $k$

  Insgesamt: polynomiale Laufzeit

Ergebnis: $A \in$ NP

## Effizient verifizierbare Sprachen und NP (Forts.)

"$\Leftarrow$": Betrachte eine beliebige Sprache $A \in \mathrm{NP}$.

Es gibt eine nichtdeterministische polynomial zeitbeschränkte Turing Maschine $M = (Z, \Sigma, \Gamma, \sqcup, \delta, z_{acc}, z_{rej})$ mit $L(M) = A$.

Sei $t(n)$ ein Polynom, so dass $M$ allen Eingaben der Länge $n$ höchstens $t(n)$ Rechenschritte ausführt

Für alle $x \in \Sigma^*$ gilt: $x \in A$ genau dann, wenn es gibt eine Folge $C_0, C_1, \ldots, C_k$ von Konfigurationen gibt mit:

- $C_0 = (\sqcup, z_s, x)$
- Für alle $i = 1, \ldots, k$ gilt: $C_i$ ist eine Folgekonfiguration von $C_{i-1}$
- $C_k$ ist eine akzeptierende Endkonfiguration



## Effizient verifizierbare Sprachen und NP (Forts.)

Für jedes Wort $x$ ist algorithmisch feststellbar, ob eine Konfigurationsfolge $C_0, C_1, \ldots, C_k$ die obigen Eigenschaften erfüllt.

Wegen der Laufzeitschranke gilt:

- $k \leq t(|x|)$
- $|C_i| \leq t(|x|) + O(1)$ für alle $i = 0, \ldots, k$

Die Gesamtlänge der Konfigurationsfolge ist $O(t(|x|)^2)$.

## Effizient verifizierbare Sprachen und NP (Forts.)

Der Aufwand zur Überprüfung der obigen Eigenschaft ist also gleich $O(t(|x|)^k)$ für eine Konstante $k$.

Betrachte nun die Sprache

$$B_M = \left\{ \langle x, w \rangle \;\middle|\; \begin{array}{l} w = \langle C_0, C_1, \ldots, C_k \rangle \text{ ist eine} \\ \text{Folge von Konfigurationen einer} \\ \text{akzeptierenden Berechnung} \\ \text{von } M \text{ auf Eingabe } x \end{array} \right\}$$

Aufgrund der obigen Überlegungen folgt: $B_M \in \mathrm{P}$.

Ergebnis: $A$ ist in Polynomialzeit verifizierbar



## NP-Vollständigkeit

**Definition.** Sei $A$ eine beliebige Sprache.

- $A$ ist NP-hart, falls $B \leq_m^p A$ für jede Sprache $B \in \mathrm{NP}$.
- $A$ ist NP-vollständig, falls $A$ NP-hart und in NP ist.

Bemerkungen

- Die NP-vollständigen Probleme sind die schwierigsten Probleme in NP
- Ist ein NP-vollständiges Problem in P, dann folgt $\mathrm{P} = \mathrm{NP}$
- Ist $\mathrm{P} \neq \mathrm{NP}$, dann gibt es für keines der NP-vollständigen Probleme einen effizienten Algorithmus

# SAT ist NP-vollständig

**Satz.** (Cook) SAT ist NP-vollständig

*Beweis.* Da SAT effizient verifizierbar ist ($\rightsquigarrow$ CVP), gilt SAT $\in$ NP.

Sei $A$ eine beliebige Sprache in NP. Laut Annahme gibt es eine nichtdeterministische Turing Maschine

$$M = (Z, \Sigma, \Gamma, \sqcup, \delta, z_s, z_{acc}, z_{rej}),$$

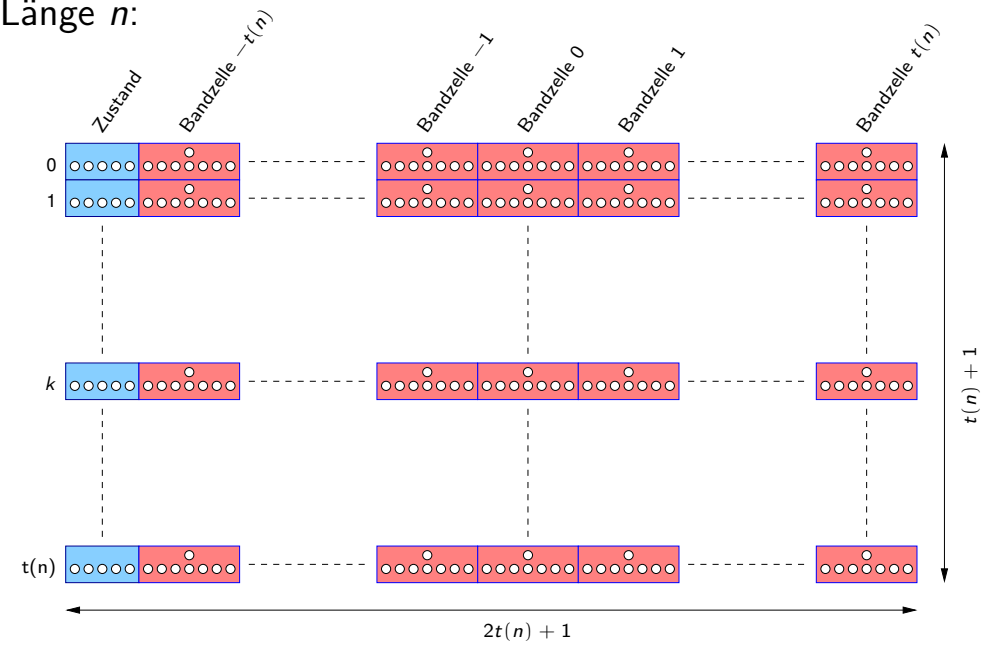
die $A$ akzeptiert und deren Laufzeit durch das Polynom $t(n)$ beschränkt ist

Zu zeigen: $A \leq_m^p$ SAT



# SAT ist NP-vollständig (Forts.)

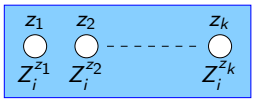
Idee: Konstruktion eines "Schaltkastens" für Eingaben der Länge $n$:



# SAT ist NP-vollständig (Forts.)

Bemerkungen:

- Der Schaltkasten besteht aus einer Vielzahl Boolescher Variablen
- Jede Zeile des Schaltkastens steht für eine Konfiguration von $M$
- Zustandsbox: Zustandsmenge $Z = \{z_1, \ldots, z_k\}$

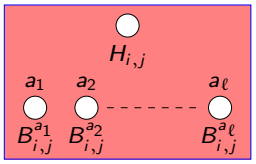



$Z_i^z = 1 \rightsquigarrow$ Zustand der $i$-ten Konfiguration ist $z$



# SAT ist NP-vollständig (Forts.)

- Bandzellenbox: Arbeitsalphabet $\Gamma = \{a_1, \ldots, a_\ell\}$




  - $H_{i,j} = 1 \rightsquigarrow$ in der $i$-ten Konfiguration befindet sich der S/L-Kopf an Position $j$
  - $B_{i,j}^{a_m} = 1 \rightsquigarrow$ in der $j$-ten Bandzelle der $i$-ten Konfiguration ist der Buchstabe $a_m$ gespeichert

Achtung: nicht jede Belegung der Variablen ist eine korrekte Konfigurationsfolge

Vorgehen: Überprüfung der Korrektheit mittels einer aussagenlogischen Formel

# SAT ist NP-vollständig (Forts.)

Hilfsformel:

$$G(x_1, \ldots, x_m) = \left( \bigvee_{i=1}^{m} x_i \right) \wedge \left( \bigwedge_{i=1}^{m-1} \bigwedge_{j=i+1}^{m} (\neg x_i \vee \neg x_j) \right)$$

**Lemma**. $G(x_1, \ldots, x_m) = 1$ genau dann, wenn genau eine der Variablen $x_1, \ldots, x_m$ mit 1 belegt ist.

*Beweis.*

- Der erste Teil der Formel wird wahr, wenn mindestens eine der Variablen mit 1 belegt ist
- Der zweite Teil der Formel wird wahr, wenn höchstens eine der Variablen mit 1 belegt ist

Da beide Teile $\wedge$-verknüpft sind, wird $G$ genau dann wahr, wenn genau eine der Variablen mit 1 belegt ist



# SAT ist NP-vollständig (Forts.)

Zu überprüfen:

- Pro Konfiguration ist exakt ein Zustand ausgewählt
- Pro Konfiguration ist genau eine Kopfposition ausgewählt
- In jeder Bandzelle ist genau ein Buchstabe ausgewählt
- In der ersten Zeile steht die Startkonfiguration von $M$ auf Eingabe $x$
- Die Konfiguration in Zeile $j$ ist eine Folgekonfiguration der Konfiguration in Zeile $j-1$
- Es gibt eine akzeptierende Endkonfiguration

# SAT ist NP-vollständig (Forts.)

Konsistenz:

$$\begin{aligned} \textsc{State}(i) &= G(Z_i^{z_1}, \ldots, Z_i^{z_k}) \\ \textsc{Cell}(i,j) &= G(B_{i,j}^{a_1}, \ldots, B_{i,j}^{a_\ell}) \\ \textsc{Head}(i) &= G(H_{i,-t(n)}, \ldots, H_{i,t(n)}) \end{aligned}$$

Insgesamt:

$$\textsc{Consistency} = \bigwedge_{i=0}^{t(n)} \left( \textsc{State}(i) \wedge \textsc{Head}(i) \wedge \bigwedge_{j=-t(n)}^{t(n)} \textsc{Cell}(i,j) \right)$$



# SAT ist NP-vollständig (Forts.)

Startkonfiguration für die Eingabe $x = x_1 \ldots x_n$:

$$\textsc{StartConf}(x_1 \ldots x_n) = Z_0^{z_s} \wedge H_{0,0} \wedge \left( \bigwedge_{j=-t(n)}^{-1} B_{0,j}^{\sqcup} \right) \wedge B_{0,0}^{x_1} \wedge \ldots \wedge B_{0,n-1}^{x_n} \wedge \left( \bigwedge_{j=n}^{t(n)} B_{0,j}^{\sqcup} \right)$$

Akzeptierende Konfiguration:

$$\textsc{Accept} = \left( \bigvee_{i=0}^{t(n)} Z_i^{z_{acc}} \right)$$

# SAT ist NP-vollständig (Forts.)

Folgekonfigurationen:

**Teil 1:** Befindet sich der S/L-Kopf nicht auf der Bandzelle, dann muss der Inhalt mit dem der nächsten Konfiguration identisch sein

$$\textsc{PartI}(i) = \bigwedge_{j=-t(n)}^{t(n)} \left(\neg H_{i,j} \rightarrow \left((B_{i,j}^{a_1} \leftrightarrow B_{i+1,j}^{a_1}) \wedge \ldots \wedge (B_{i,j}^{a_\ell} \leftrightarrow B_{i+1,j}^{a_\ell})\right)\right)$$

wobei

$$\begin{aligned} A \rightarrow B &\equiv \neg A \vee B \\ A \leftrightarrow B &\equiv (\neg A \vee B) \wedge (A \vee \neg B) \end{aligned}$$



# SAT ist NP-vollständig (Forts.)

**Teil 2.** Befindet sich der S/L-Kopf auf der Bandzelle, dann muss ein Rechenschritt ausgeführt werden

$$\textsc{PartII}(i) = \bigwedge_{j=-t(n)}^{t(n)} \bigwedge_{z \in Z} \bigwedge_{a \in \Gamma} \textsc{Transition}(i, j, z, a)$$

$\textsc{Transition}(i, j, z, a)$ wird anhand $\delta(z, a)$ definiert

Fallunterscheidung:

- $\|\delta(z, a)\| > 0$
- $\|\delta(z, a)\| = 0$
- $z = z_{acc}$

## SAT ist NP-vollständig (Forts.)

Fall 1: Angenommen, $\delta(z,a) = \{(z_1,b_1,D_1),\ldots,(z_q,b_q,D_q)\}$, wobei $b_r \in \Gamma$ und $D_r \in \{L,R,N\}$

$$\textsc{Transition}(i,j,z,a) = (H_{i,j} \wedge Z_i^z \wedge B_{i,j}^a) \rightarrow \left(\bigvee_{r=1}^{q} \left(H_{i+1,j+m(D_r)} \wedge Z_{i+1}^{z_r} \wedge B_{i+1,j+m(D_r)}^{b_r}\right)\right)$$

wobei

$$m(D) = \begin{cases} -1 & D = L \\ 0 & D = N \\ 1 & D = R \end{cases}$$



## SAT ist NP-vollständig (Forts.)

Fall 2: Angenommen, $\delta(z,a) = \emptyset$

$$\textsc{Transition}(i,j,z,a) = (H_{i,j} \wedge Z_i^z \wedge B_{i,j}^a) \rightarrow (H_{i,j} \wedge \neg H_{i,j})$$

In diesem Fall ist die Formel unerfüllbar

Fall 3: $z = z_{acc}$

$$\textsc{Transition}(i,j,z_{acc},a) = (H_{i,j} \wedge Z_i^{z_{acc}} \wedge B_{i,j}^a) \rightarrow \left(H_{i+1,j} \wedge Z_{i+1}^{z_{acc}} \wedge B_{i+1,j}^a\right)$$

Dies entspricht der Überführungsfunktion

$$\delta(z_{acc},a) = \{(z_{acc},a,N)\}$$

# SAT ist NP-vollständig (Forts.)

Insgesamt:

$$\textsc{Eval}(x) = \textsc{Consistency} \wedge \textsc{StartConf}(x) \wedge \textsc{Accept} \wedge \bigwedge_{i=0}^{t(n)} (\textsc{PartI}(i) \wedge \textsc{PartII}(i))$$

Zu zeigen:

- $\textsc{Eval}(x)$ ist erfüllbar genau dann, wenn $M$ die Eingabe $x$ akzeptiert
- $\textsc{Eval}(x)$ ist in Polynomialzeit aus $x$ berechenbar



# SAT ist NP-vollständig (Forts.)

Behauptung: $\textsc{Eval}(x) \in$ SAT genau dann, wenn $x \in A$

"$\Rightarrow$": Angenommen, $\textsc{Eval}(x)$ ist erfüllbar.

Dann liefert die Belegung der Variablen eine Konfigurationsfolge von $M$ auf Eingabe $x$, die bei der Startkonfiguration beginnt und in einer akzeptierenden Konfiguration endet.

Folglich gibt es im Berechnungsbaum von $M$ auf Eingabe $x$ mindestens einen akzeptierenden Berechnungspfad, d.h., $x \in A$

"$\Leftarrow$": Angenommen, $x \in A$.

Dann gibt es eine akzeptierende Konfigurationsfolge von $M$ auf Eingabe $x$. Anhand dieser Folge kann eine erfüllende Belegung für $\textsc{Eval}(x)$ abgeleitet werden

Somit: $\textsc{Eval}(x) \in$ SAT

## SAT ist NP-vollständig (Forts.)

Aufwand zur Berechnung von $\textsc{Eval}(x)$ anhand von $x$, $|x| = n$:

- $\textsc{Consistency}$: $O(t(n)^2)$
- $\textsc{StartConf}$: $O(t(n))$
- $\textsc{Accept}$: $O(t(n))$
- $\textsc{Transition}$: $O(1)$
- $\textsc{PartI}$: $O(t(n))$
- $\textsc{PartII}$: $O(t(n))$

$\rightsquigarrow$ Gesamt: $O(t(n)^2)$

Somit: $A \leq_m^p$ SAT



## Konsequenzen

**Korollar 1.** KNF-SAT ist NP-vollständig

*Beweis.* Alle Teilformeln in $\textsc{Eval}(x)$ kann man in äquivalente KNF-Formeln umformen. Somit gilt $A \leq_m^p$ KNF-SAT für alle $A \in$ NP.

**Korollar.** 3-SAT ist NP-vollständig

*Beweis.* KNF-SAT $\leq_m^p$ 3-SAT

# Zusammenfassung

- NP enthält eine Vielzahl von Problemen, die in der Praxis häufig vorkommen
- Jedes Problem in NP ist effizient verifizierbar
- Es ist nicht bekannt, ob alle Sprachen in NP effizient entscheidbar sind, d.h., ob $P = NP$
- Die NP-vollständigen Probleme sind die schwierigsten Probleme in NP
- Falls ein NP-vollständiges Problem in P ist, dann ist $P = NP$