Berechenbarkeits- und Komplexitätstheorie

Lerneinheit 4: Die Klasse P

Prof. Dr. Christoph Karg

Studiengang Informatik
Hochschule Aalen

Wintersemester 2015/2016

Einleitung

Diese Lerneinheit beschäftigt sich mit effizient lösbaren Problemen.

Sie gliedert sich in:

- Beispiele für Sprachen in P
  - Erreichbarkeit in gerichteten Graphen
  - Kontextfreie Sprachen
  - Circuit Value Problem
  - Erfüllbarkeit von Formeln in 2-KNF
- Polynomialzeit many-one Reduktionen

Definition der Klasse P

Definition. Die Klasse P enthält alle in polynomialer Zeit lösbaren Entscheidungsprobleme, formal:

$$\mathrm{P} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \mathrm{DTIME}(n^k)$$

Bemerkungen:

- P enthält alle Probleme, die aus realistischen Gesichtspunkten in vertretbarem Aufwand lösbar sind
- P ist robust, d.h., die Wahl eines deterministischen Berechnungsmodells beeinflusst nicht die Zugehörigkeit einer Sprache zu P

Erreichbarkeit in gerichteten Graphen

Erreichbarkeit in gerichteten Graphen (PATH)

Gegeben:

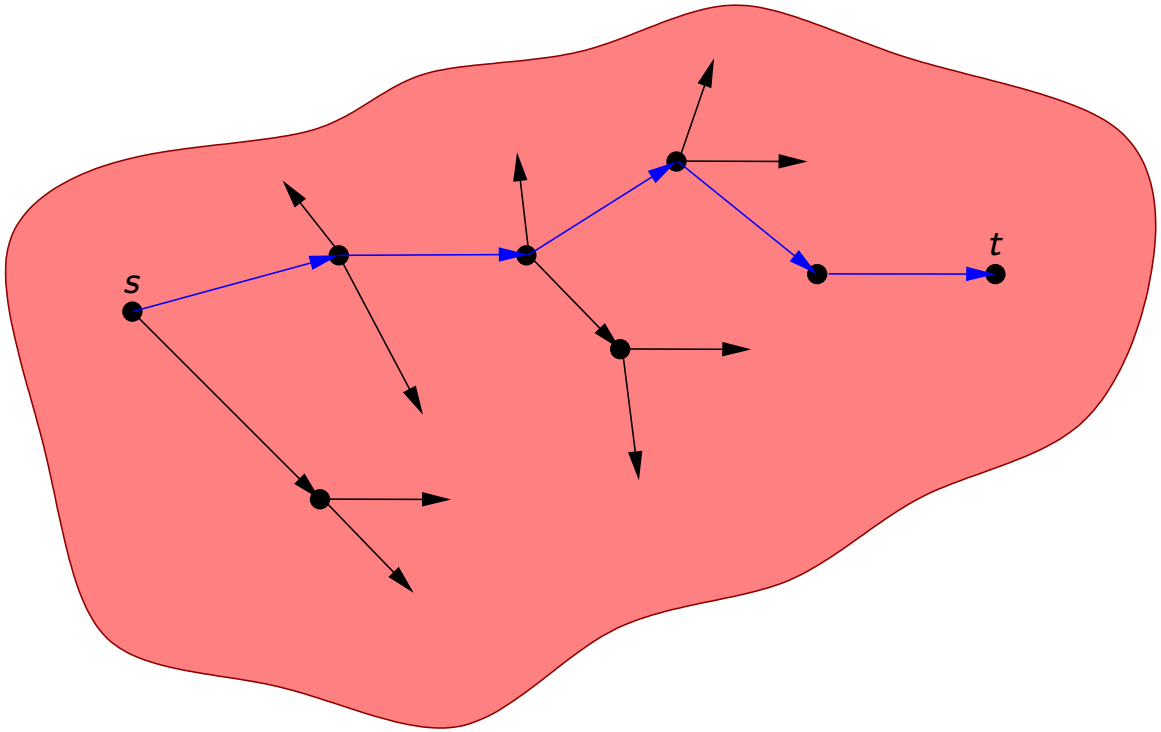
- Gerichteter Graph $G = (V, E)$
- Knoten $s, t \in V$

Gefragt: Ist t von s aus erreichbar? Oder anders gefragt: gibt es in G einen Pfad von s nach t?

Satz. PATH $\in$ P

Erreichbarkeit in gerichteten Graphen (Forts.)

Idee zum Beweis:



Beobachtung: Wenn t von s aus erreichbar ist, dann gibt es einen Pfad von s nach t der Länge $\leq n$

Erreichbarkeit in gerichteten Graphen (Forts.)

Beweis. Betrachte den folgenden nichtdeterministischen Algorithmus

PATH(G, s, t)
Input: Graph $G = (V, E)$, Knoten $s, t \in V$
Output: `true`, falls es in G einen Pfad von s nach t gibt
`false`, sonst.

```
1 k := 1; v := s; n := ||V||
2 while (k ≤ n − 1) and (v ≠ t) do
3     Wähle nichtdeterministisch einen Knoten v ∈ Adj[v]
4     k := k + 1
5 if (v = t) then
6     return true
7 else
8     return false
```

Erreichbarkeit in gerichteten Graphen (Forts.)

Korrektheit: ✓ (wegen der obigen Beobachtung)

Speicherplatzbedarf: Angenommen, die Knoten sind durchnummeriert, d.h., $V = \{1, \ldots, n\}$

Konsequenz:

- Zur Speicherung von v werden $\log_2 n$ viele Bits benötigt
- Wenn k binär kodiert wird, dann liegt der Platzbedarf ebenfalls bei $\log_2 n$ Bits

Platzkomplexität $O(\log_2 n)$

$\rightsquigarrow$ Path $\in$ NL $\subseteq$ P

Kontextfreie Sprachen

Satz. Für jede kontextfreie Sprache L gilt: $L \in \mathrm{P}$

Beweis. Sei L eine beliebige kontextfreie Sprache.

Automatentheorie $\rightsquigarrow$ es gibt eine kontextfreie Grammatik $G = (V, \Sigma, P, S)$ in Chomsky Normalform mit $L(G) = L$

Beachte: Die Grammatik G ist fest gewählt und nicht Teil der Eingabe

Ansatz: Lösung des Wortproblems unter Einsatz der Grammatik G

Programmiertechnik: Dynamisches Programmieren
$\rightsquigarrow$ Algorithmus von Cocke, Younger und Kasami

Kontextfreie Sprachen (Forts.)

$\mathrm{CYK}_G(x)$

Input: Wort $x = a_1 \dots a_n \in \Sigma^*$

Output: `true`, falls $x \in L(G)$, `false`, sonst.

```
1 if (x = ε) and (S → ε ∈ P) then
2    return true
3 for i := 1 to n do
4    for jede Variable A ∈ V do
5       if (A → a_i ∈ P) then
6          T[1, i] := T[1, i] ∪ {[A → a_i, 0]}
```

Kontextfreie Sprachen (Forts.)

```
7  for ℓ := 2 to n do
8    for i := 1 to n − ℓ + 1 do
9      j := i + ℓ − 1
10     for k := i to j − 1 do
11       for jede Regel A → BC ∈ P do
12         if (B ∈ T[i, k]) and (C ∈ T[k, j]) then
13           T[i, j] := T[i, j] ∪ {[A → BC, k]}
14 if [S → w, ⋆] ∈ T[1, n] then
15   return true
16 else
17   return false
```

Kontextfreie Sprachen (Forts.)

Korrektheit: ✓ (Beweis $\rightsquigarrow$ Automatentheorie)

Laufzeit:

- Da die Grammatik G fest gewählt ist, ist die Laufzeit der Schleifen in Zeile 4–6 und Zeile 11–13 konstant
- Der wesentliche Aufwand entsteht durch die drei verschachtelten Schleifen in Zeile 7–13. Jede der Schleifen wird höchstens n-mal durchlaufen

Gesamt: Laufzeit $O(n^3)$

Somit: $L \in \mathrm{P}$

Beispiel: CYK-Algorithmus

Beispiel. Betrachte die folgende Grammatik G Chomsky Normalform:

$$
\begin{aligned}
S &\to AB \\
S &\to BC \\
A &\to BA \\
A &\to a \\
B &\to CC \\
B &\to b \\
C &\to AB \\
C &\to a
\end{aligned}
$$

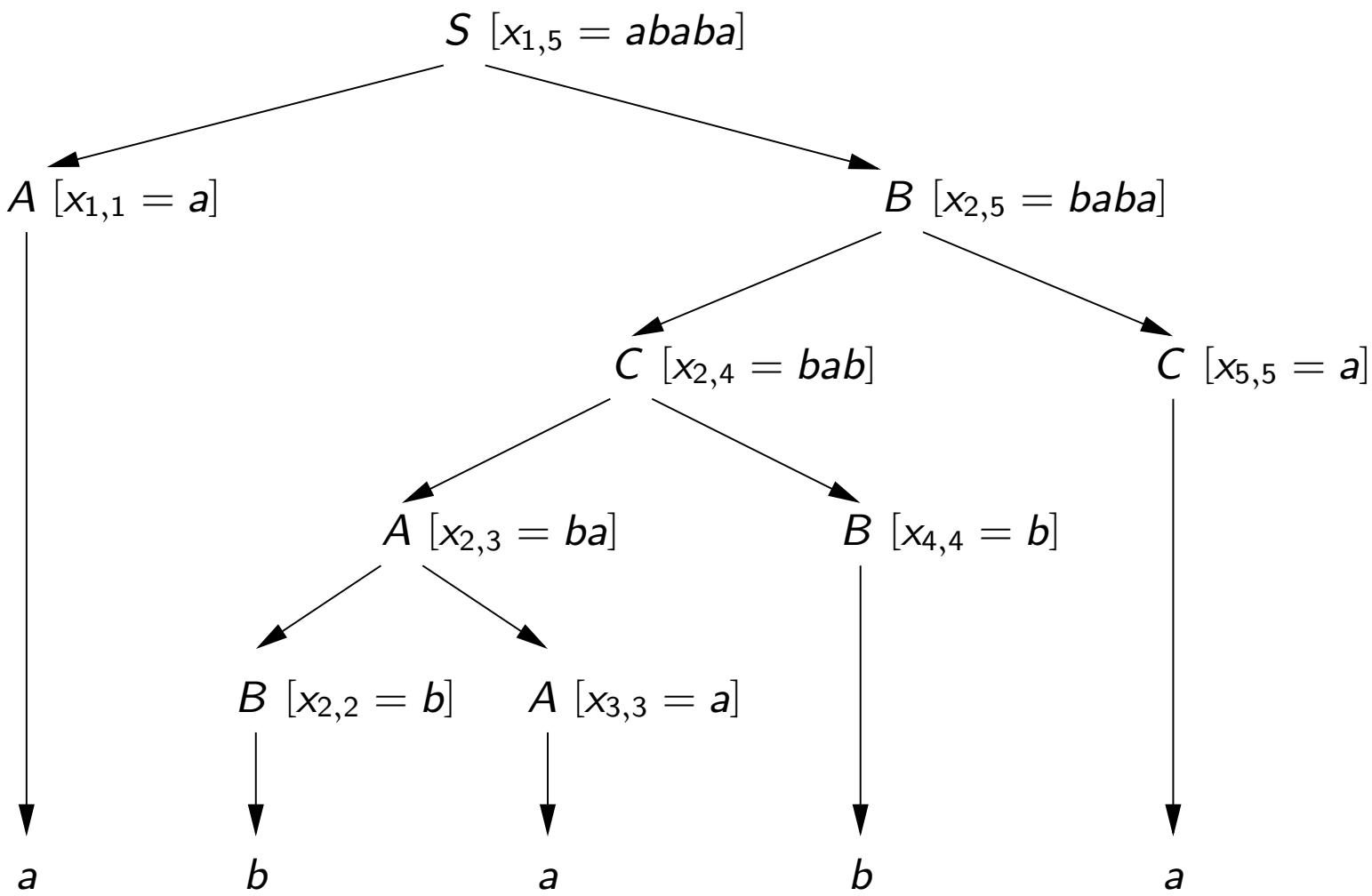
Beispiel: CYK-Algorithmus (Forts.)

Betrachte die Eingabe $x = ababa$:

i	1	2	3	4	5
	a	b	a	b	a
$j = 1$	$[A \to a, 0]$ $[C \to a, 0]$	$[B \to b, 0]$	$[A \to a, 0]$ $[C \to a, 0]$	$[B \to b, 0]$	$[A \to a, 0]$ $[C \to a, 0]$
$j = 2$	$[S \to AB, 1]$ $[C \to AB, 1]$	$[S \to BC, 2]$ $[A \to BA, 2]$	$[S \to AB, 3]$ $[C \to AB, 3]$	$[S \to BC, 4]$ $[A \to BA, 4]$	
$j = 3$	$[B \to CC, 2]$	$[S \to BC, 2]$ $[S \to AB, 3]$ $[C \to AB, 3]$	$[B \to CC, 4]$		
$j = 4$	$[B \to CC, 1]$ $[B \to CC, 2]$	$[B \to CC, 4]$			
$j = 5$	$[S \to AB, 1]$ $[C \to AB, 1]$ $[A \to BA, 3]$ $[A \to BA, 4]$ $[S \to BC, 4]$				

Beispiel: CYK-Algorithmus (Forts.)

Ein Ableitungsbaum für $x = ababa$ ist:



Circuit Value Problem

Circuit Value Problem (CVP)

Gegeben:

- Aussagenlogische Formel $F(x_1, \ldots, x_n)$
- Belegung $B = (b_1, \ldots, b_n)$

Gefragt: Ist B eine erfüllende Belegung für F?

Satz. CVP $\in$ P

Beweis. Idee: rekursive Auswertung der Formel

Circuit Value Problem (Forts.)

EVALUATE(F, B)

Input: Formel F, Belegung B

Output: `true`, falls B eine erfüllende Belegung für F ist, `false`, sonst.

```
1  while F = (G) do F := G
2  if F = x_i then
3     return B[x_i]
4  Suche in F den bindungsschwächsten Operator
5  if F = ¬G then
6     return not EVALUATE(G, B)
7  elseif F = G ∧ H then
8     return EVALUATE(G, B) and EVALUATE(H, B)
9  elseif F = G ∨ H then
10    return EVALUATE(G, B) or EVALUATE(H, B)
```

Beispiel Circuit Value Problem (Forts.)

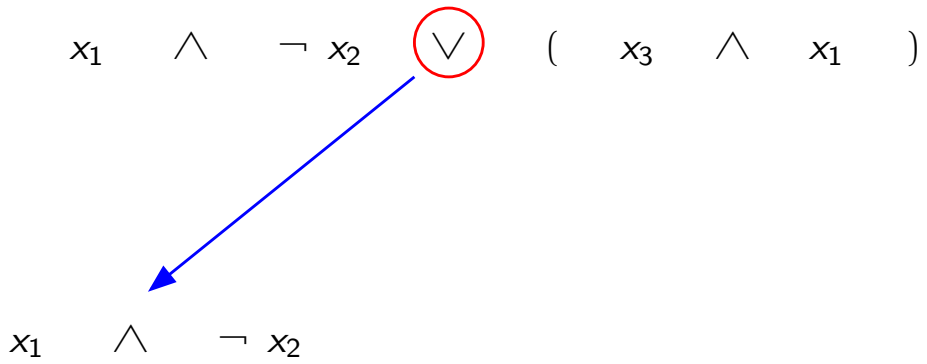
Formel: $x_1 \wedge \neg x_2 \vee (x_3 \wedge x_1)$
Belegung: $x_1 = 1$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$

$$x_1 \quad \wedge \quad \neg \; x_2 \quad \vee \quad (\quad x_3 \quad \wedge \quad x_1 \quad)$$

Beispiel Circuit Value Problem (Forts.)

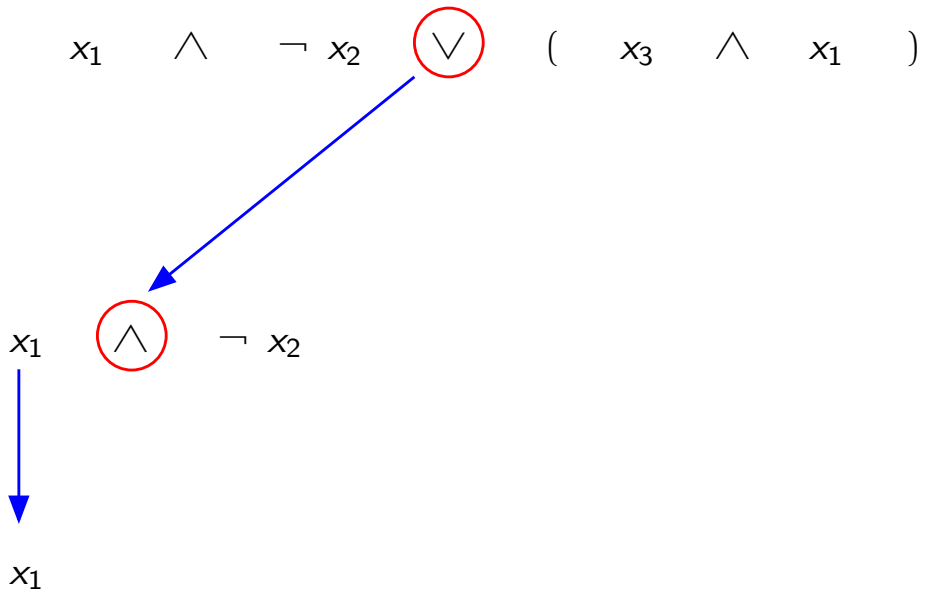
Formel: $x_1 \wedge \neg x_2 \vee (x_3 \wedge x_1)$

Belegung: $x_1 = 1,\ x_2 = 0,\ x_3 = 0$



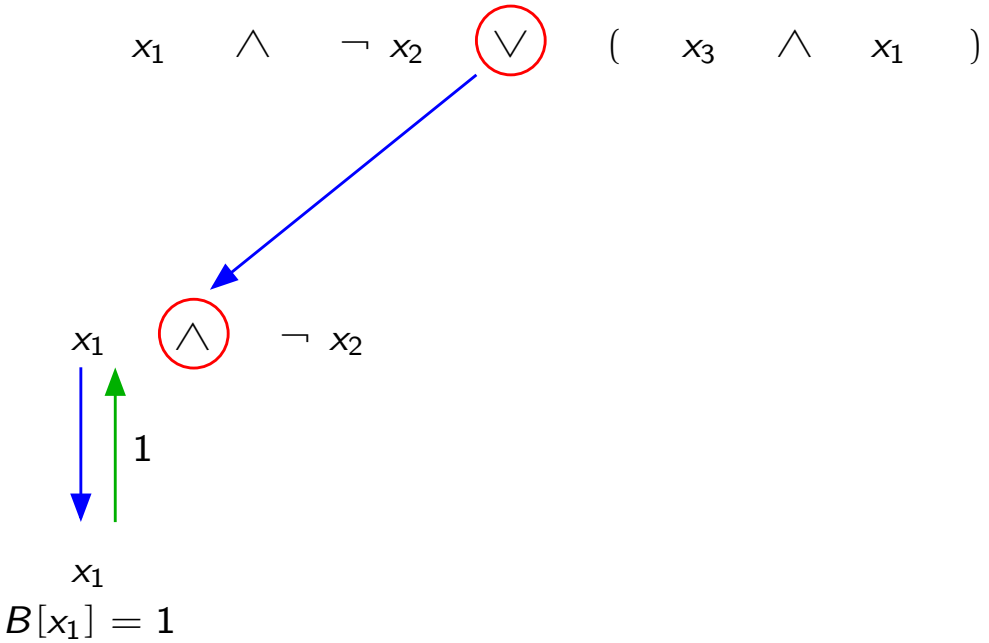
Beispiel Circuit Value Problem (Forts.)

Formel: $x_1 \wedge \neg x_2 \vee (x_3 \wedge x_1)$
Belegung: $x_1 = 1,\ x_2 = 0,\ x_3 = 0$



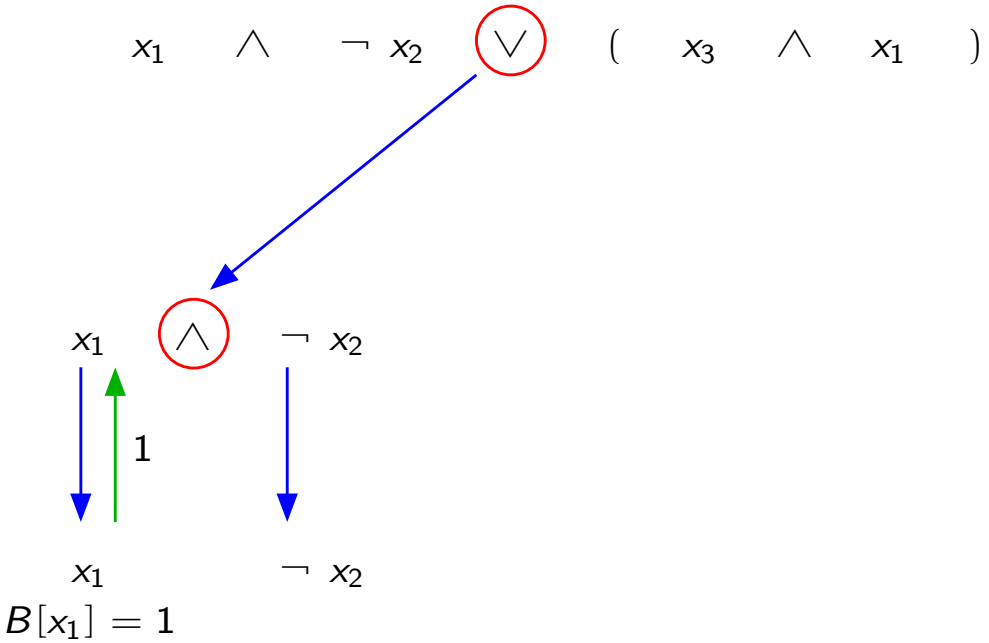
Beispiel Circuit Value Problem (Forts.)

Formel: $x_1 \wedge \neg x_2 \vee (x_3 \wedge x_1)$
Belegung: $x_1 = 1,\ x_2 = 0,\ x_3 = 0$



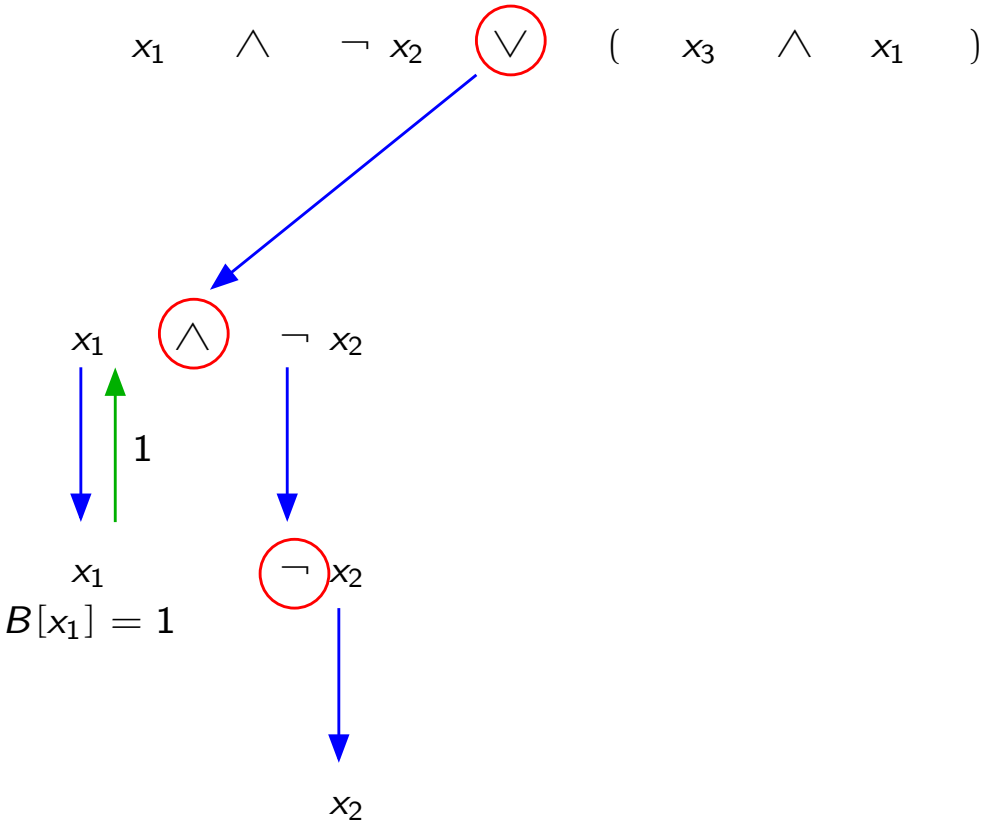
Beispiel Circuit Value Problem (Forts.)

Formel: $x_1 \wedge \neg x_2 \vee (x_3 \wedge x_1)$
Belegung: $x_1 = 1,\ x_2 = 0,\ x_3 = 0$



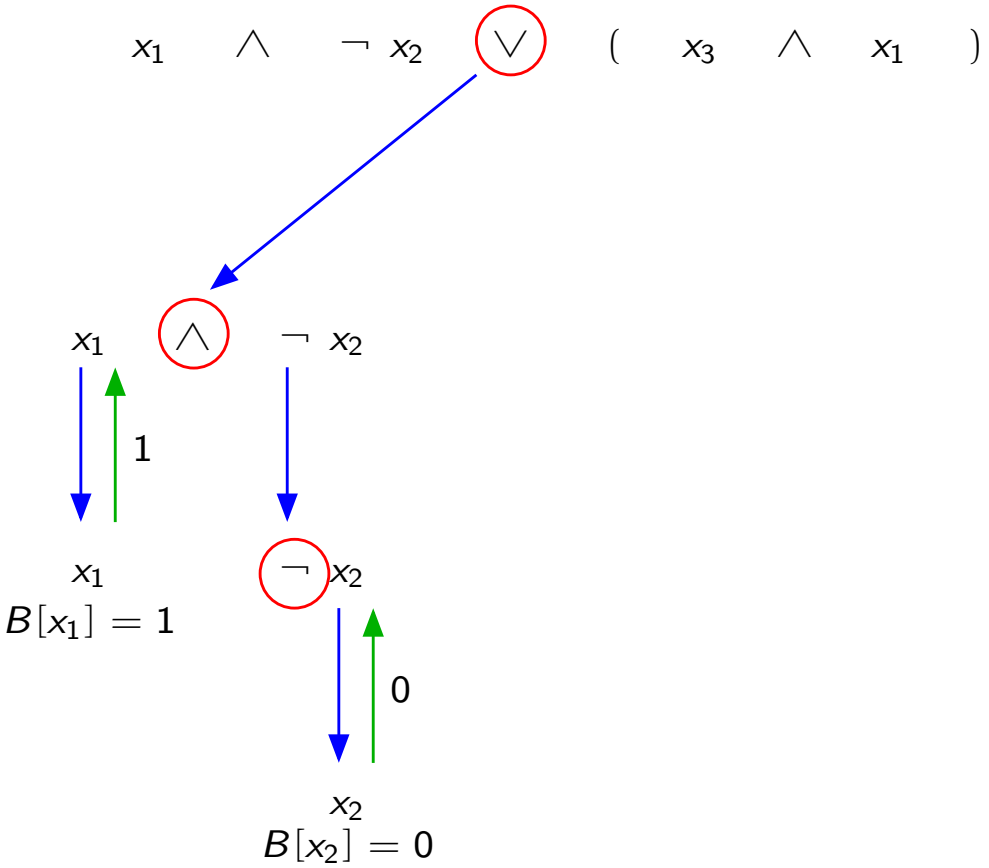
Beispiel Circuit Value Problem (Forts.)

Formel: $x_1 \wedge \neg x_2 \vee (x_3 \wedge x_1)$
Belegung: $x_1 = 1,\ x_2 = 0,\ x_3 = 0$



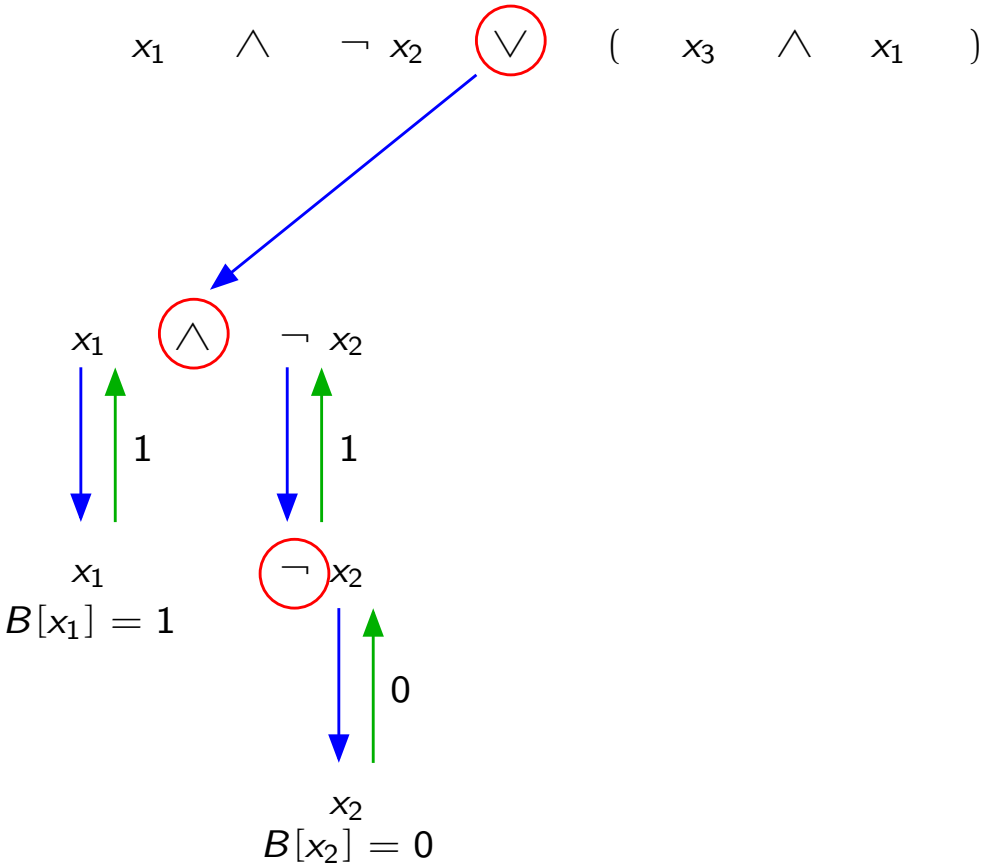
Beispiel Circuit Value Problem (Forts.)

Formel: $x_1 \wedge \neg x_2 \vee (x_3 \wedge x_1)$
Belegung: $x_1 = 1,\ x_2 = 0,\ x_3 = 0$



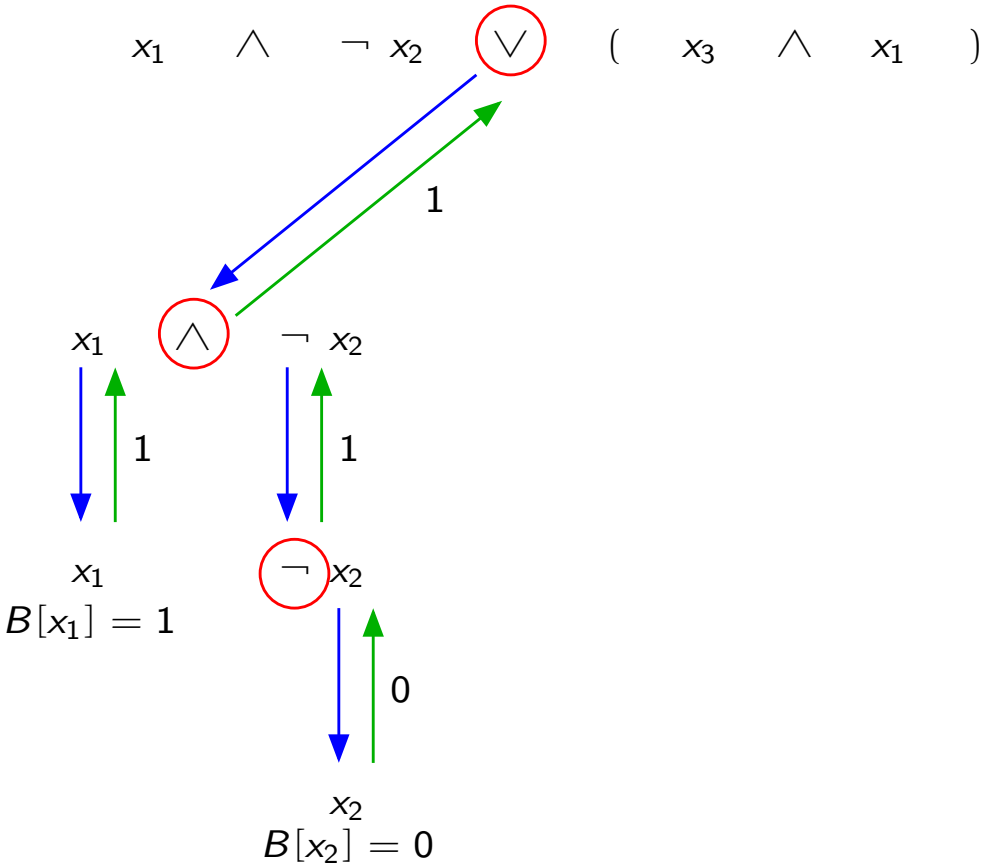
Beispiel Circuit Value Problem (Forts.)

Formel: $x_1 \wedge \neg x_2 \vee (x_3 \wedge x_1)$
Belegung: $x_1 = 1,\ x_2 = 0,\ x_3 = 0$



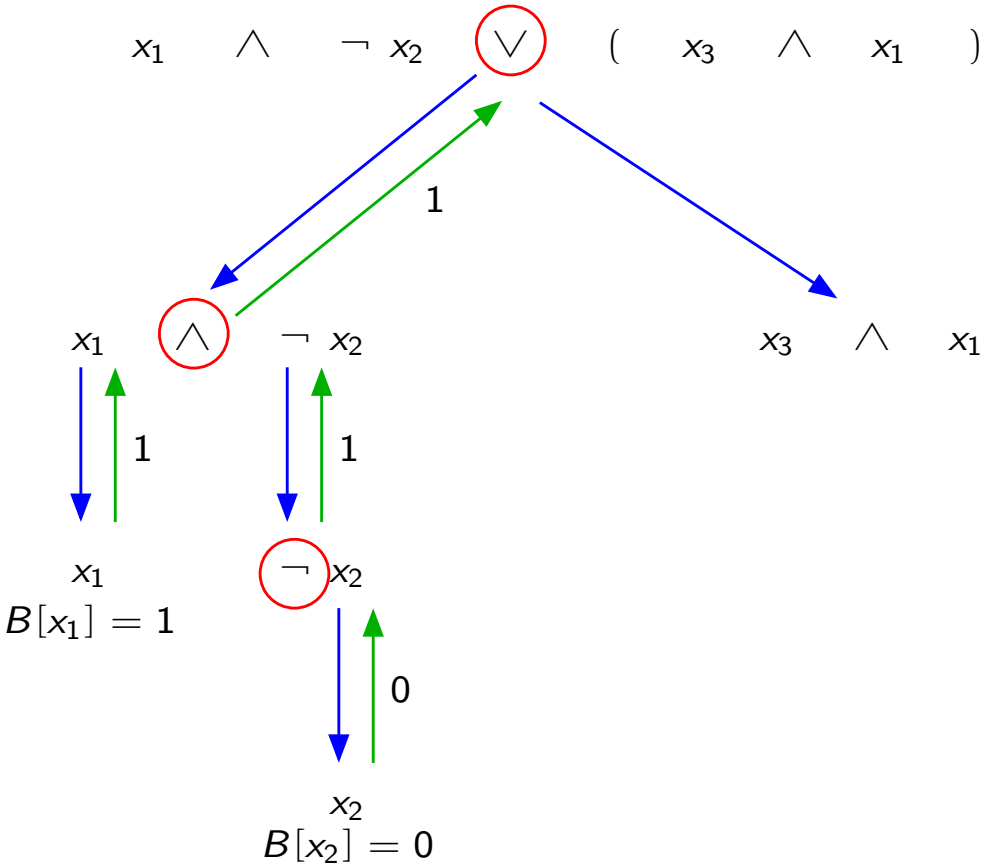
Beispiel Circuit Value Problem (Forts.)

Formel: $x_1 \wedge \neg x_2 \vee (x_3 \wedge x_1)$
Belegung: $x_1 = 1,\ x_2 = 0,\ x_3 = 0$



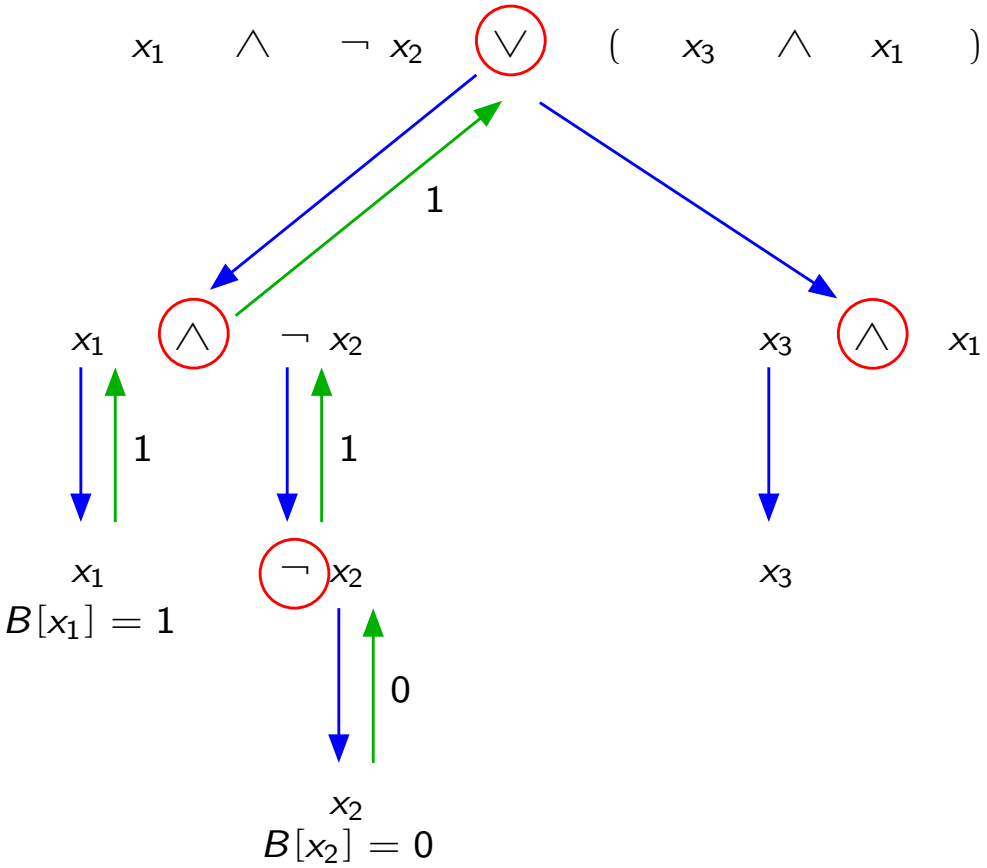
Beispiel Circuit Value Problem (Forts.)

Formel: $x_1 \wedge \neg x_2 \vee (x_3 \wedge x_1)$
Belegung: $x_1 = 1,\ x_2 = 0,\ x_3 = 0$



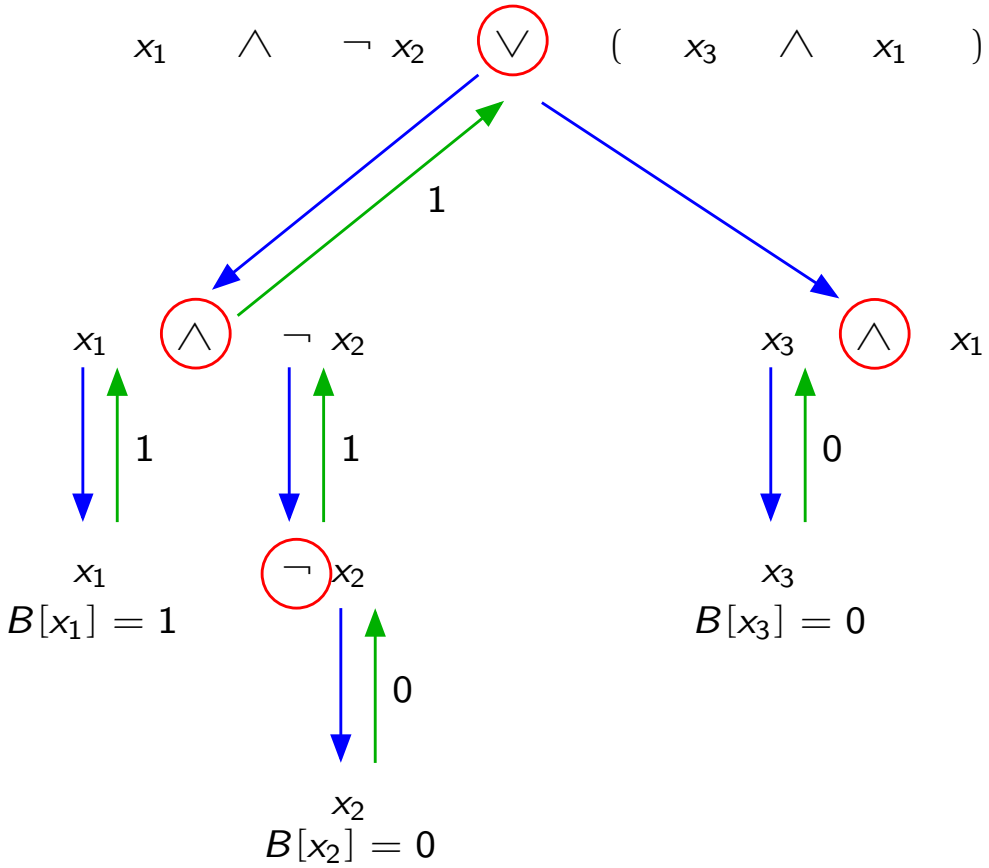
Beispiel Circuit Value Problem (Forts.)

Formel: $x_1 \wedge \neg x_2 \vee (x_3 \wedge x_1)$
Belegung: $x_1 = 1,\ x_2 = 0,\ x_3 = 0$



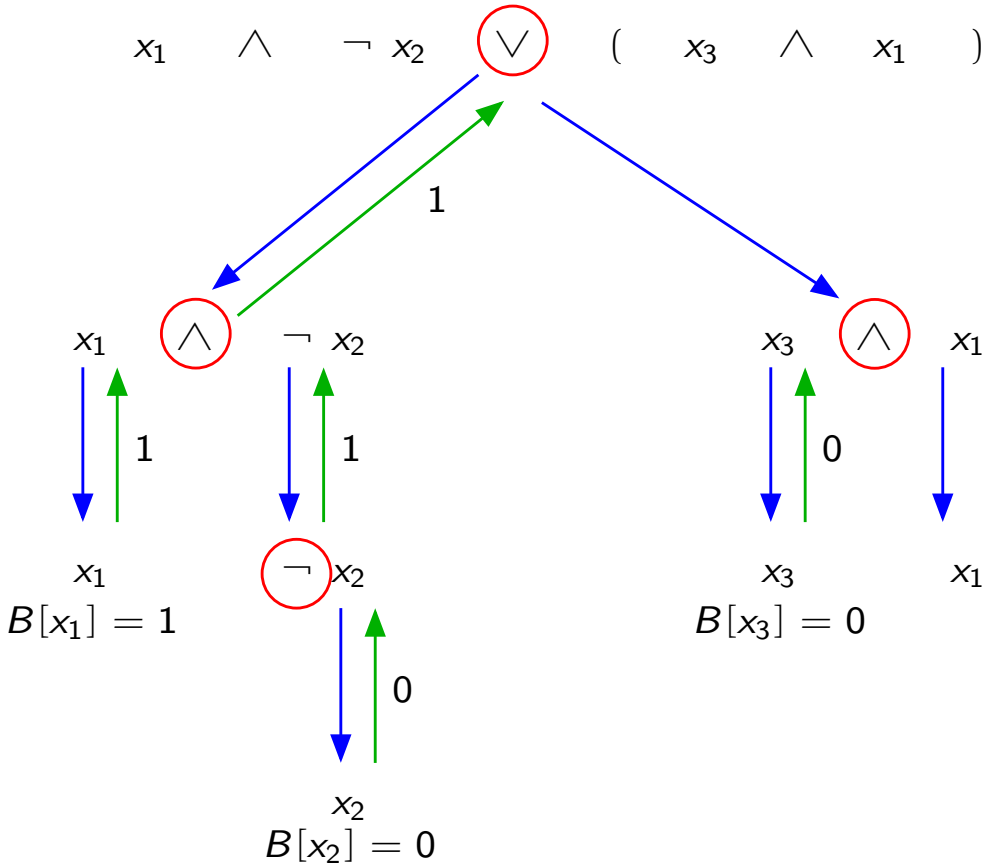
Beispiel Circuit Value Problem (Forts.)

Formel: $x_1 \wedge \neg x_2 \vee (x_3 \wedge x_1)$
Belegung: $x_1 = 1,\ x_2 = 0,\ x_3 = 0$



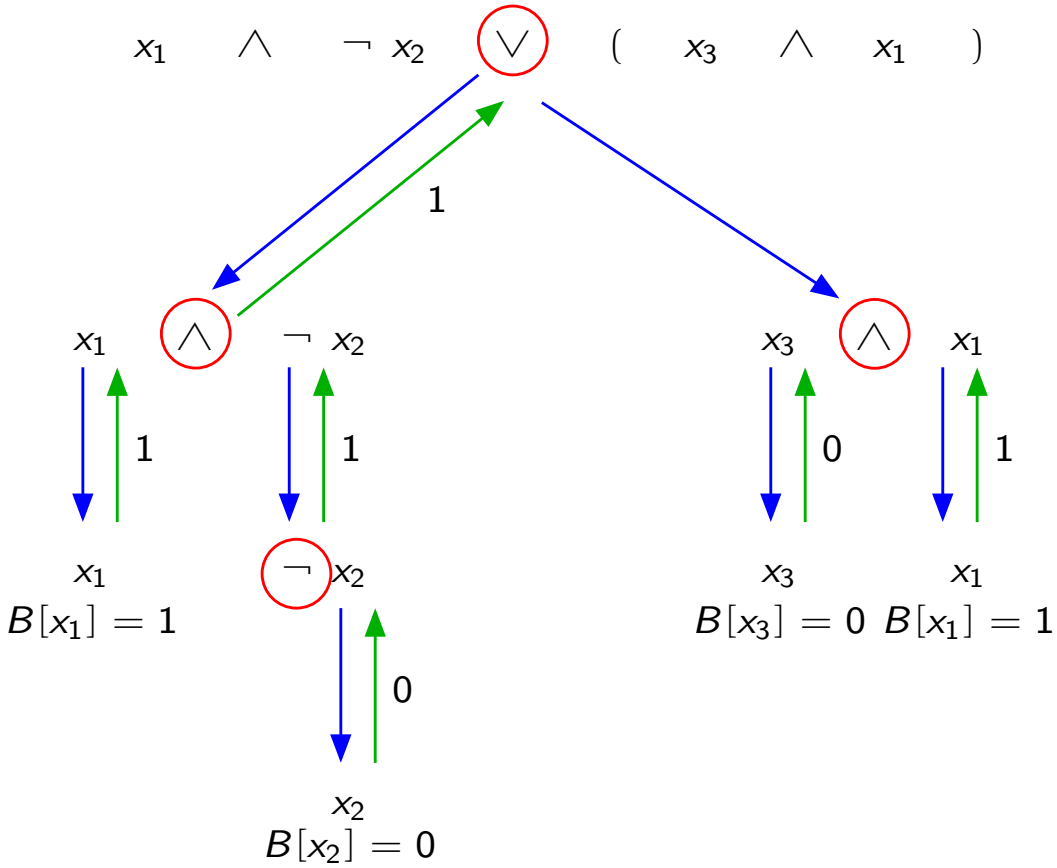
Beispiel Circuit Value Problem (Forts.)

Formel: $x_1 \wedge \neg x_2 \vee (x_3 \wedge x_1)$
Belegung: $x_1 = 1,\ x_2 = 0,\ x_3 = 0$



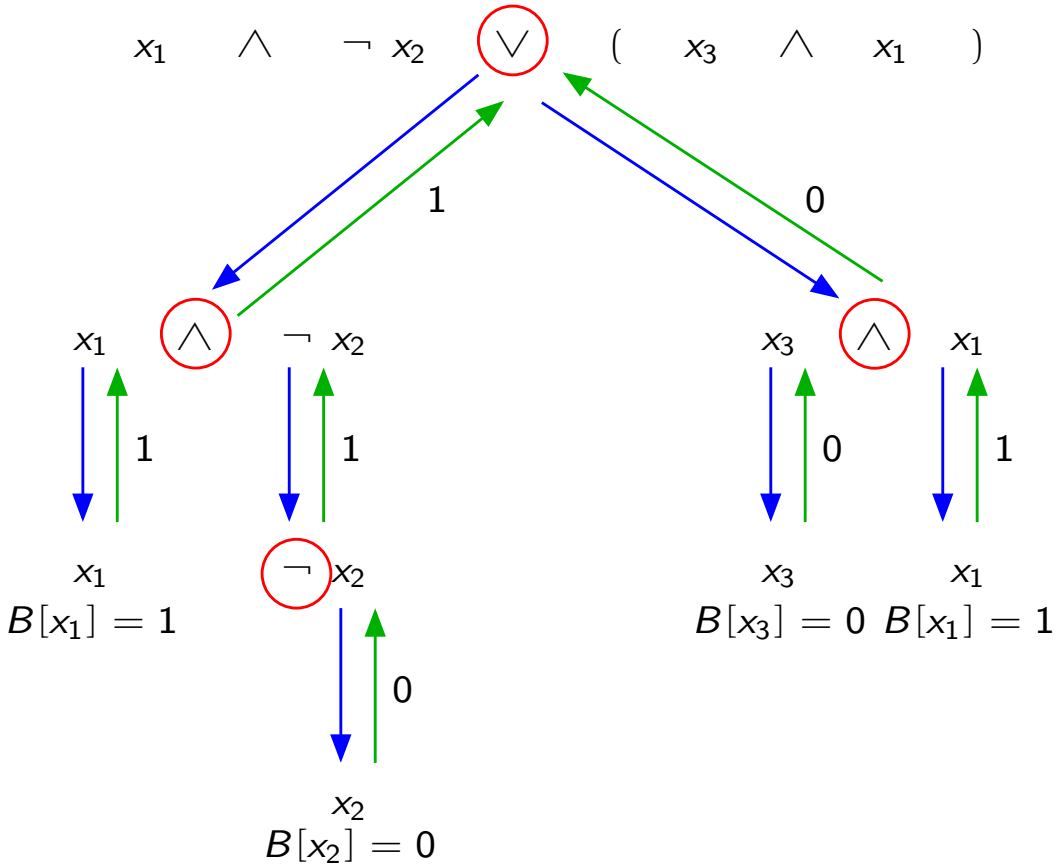
Beispiel Circuit Value Problem (Forts.)

Formel: $x_1 \wedge \neg x_2 \vee (x_3 \wedge x_1)$
Belegung: $x_1 = 1$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$



Beispiel Circuit Value Problem (Forts.)

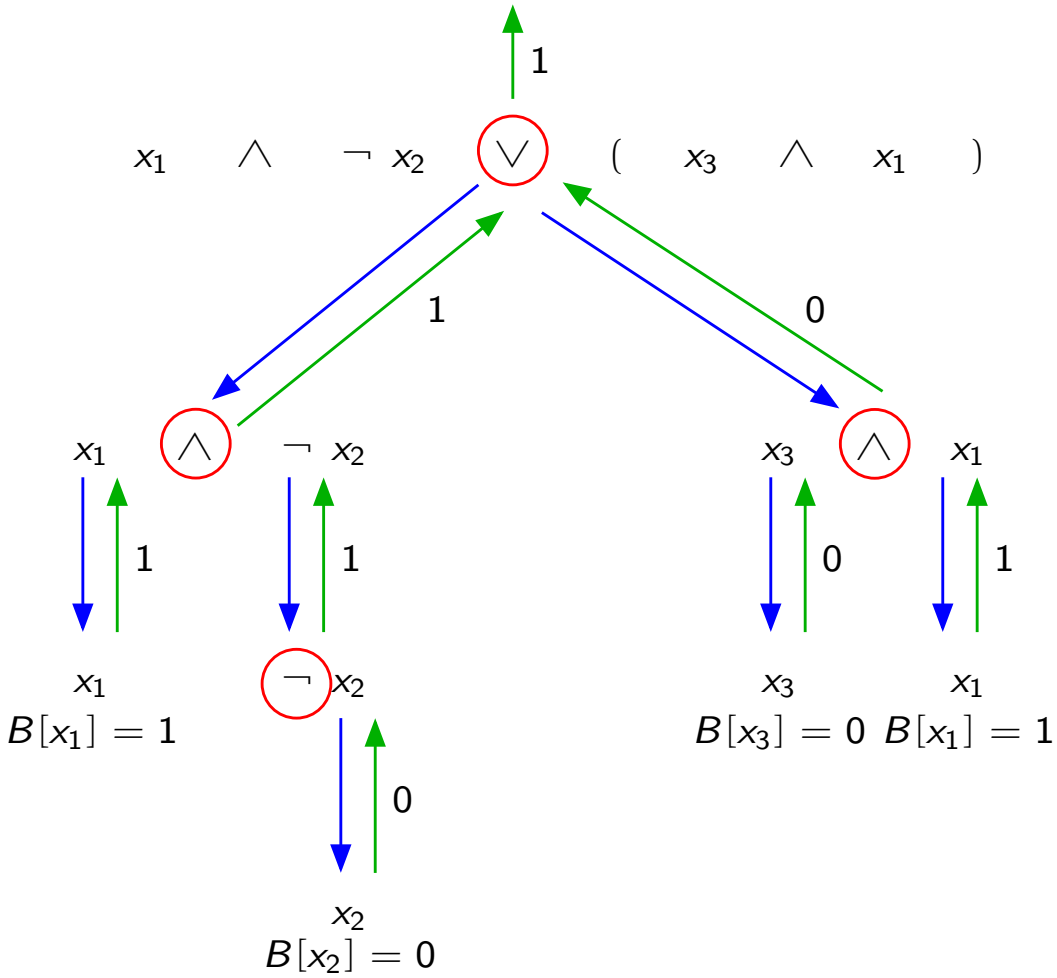
Formel: $x_1 \wedge \neg x_2 \vee (x_3 \wedge x_1)$
Belegung: $x_1 = 1,\ x_2 = 0,\ x_3 = 0$



Beispiel Circuit Value Problem (Forts.)

Formel: $x_1 \wedge \neg x_2 \vee (x_3 \wedge x_1)$

Belegung: $x_1 = 1,\ x_2 = 0,\ x_3 = 0$



Circuit Value Problem (Forts.)

Korrektheit: ✓

Laufzeit:

- Die Suche nach dem bindungsschwächsten Operator in einer Formel der Länge n ist in $O(n)$ Rechenschritten möglich
- Die Zerlegung von F in Teilformeln ist in $O(n)$ Rechenschritten durchführbar
- Bei einer Formel der Länge n gibt es insgesamt höchstens n rekursive Aufrufe

Gesamt: Laufzeit von $O(n^2)$

Erfüllbarkeit von Formeln in 2-KNF

Erfüllbarkeit von aussagenlogischen Formeln in 2-KNF (2-SAT)

Gegeben: Aussagenlogische Formel F in 2-KNF

Gefragt: Ist F erfüllbar?

Satz. 2-SAT $\in$ P

Beweis. Betrachte den Algorithmus $\textsc{TwoSat}(F)$:

Erfüllbarkeit von Formeln in 2-KNF (Forts.)

$\textsc{TwoSat}(F)$

Input: Aussagenlogische Formel F in 2-KNF

Output: `true`, falls F erfüllbar ist, `false`, sonst.

```
1 V := Menge der Variablen in F
2 C := Menge der Klauseln in F
3 for jede Variable x ∈ V do
4     color(x) := white
5 for jede Klausel K ∈ C do
6     color(K) := white
7 while V ≠ ∅ do
8     Wähle x ∈ V
9     value(x) := 1; color(x) := black
```

Erfüllbarkeit von Formeln in 2-KNF (Forts.)

10 $\mathit{first} := \texttt{true}$

11 **while** C *enthält eine Klausel* $K = (\ell_1 \vee \ell_2)$ *mit* $\mathit{color}(K) = \texttt{white}$ *und mindestens einem belegtem Literal* **do**

12 **if** $(\ell_1 = 1)$ **or** $(\ell_2 = 1)$ **then**

13 $\mathit{color}(K) := \texttt{black}$

14 **else if** $(\ell_1 = 0)$ **and** $(\ell_2 = 0)$ **then**

15 **if** $(\mathit{first} = \texttt{true})$ **then**

16 **for** *jede Variable* $x' \in V$ **do**

17 $\mathit{color}(x') := \texttt{white}$

18 **for** *jede Klausel* $K' \in C$ **do**

19 $\mathit{color}(K') := \texttt{white}$

Erfüllbarkeit von Formeln in 2-KNF (Forts.)

```
20            value(x) := 0; color(x) := black
21            first := false
22          else
23            return false
24        else if (ℓ1 = 0) then
25          value(ℓ2) := 1; color(ℓ2) := black
26        else
27          value(ℓ1) := 1; color(ℓ1) := black
28      for jede Variable x' ∈ V do
29        if (color(x') = black) then V := V − {x'}
30      for jede Klausel K' ∈ C do
31        if (color(K') = black) then C := C − {K'}
32  return true
```

Erfüllbarkeit von Formeln in 2-KNF (Forts.)

Bemerkungen:

- Der Algorithmus belegt Schritt für Schritt eine Variable mit 1 und verarbeitet die Auswirkungen
- Wird ein Widerspruch festgestellt, dann wird die Variable mit 0 belegt und der Vorgang wiederholt
- Kann die Variable nicht widerspruchsfrei belegt werden, dann ist die Formel nicht erfüllbar
- Die Laufzeit von $\textsc{TwoSat}(F)$ bei einer Formel mit n Variablen und m Klauseln ist $O(n \cdot m)$

Beispiel zu $\textsc{TwoSat}(F)$

Beispiel. $F = (\neg x_2 \vee x_3) \wedge (x_1 \vee x_2) \wedge (\neg x_2 \vee \neg x_3) \wedge (x_4 \vee x_5)$

first	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$\neg x_2 \vee x_3$	$x_1 \vee x_2$	$\neg x_2 \vee \neg x_3$	$x_4 \vee x_5$
`true`	1	·	·	·	·	·	✓	·	·
`true`	(1)	·	·	·	·	·	(✓)	·	·
`true`	(1)	1	·	·	·	$\rightsquigarrow x_3 = 1$	(✓)	·	·
`true`	(1)	1	1	·	·	✓	(✓)	×	·
`false`	(1)	0	·	·	·	✓	(✓)	✓	·
`false`	(1)	(0)	·	·	·	(✓)	(✓)	(✓)	·
`true`	(1)	(0)	1	·	·	(✓)	(✓)	(✓)	·
`true`	(1)	(0)	(1)	1	·	(✓)	(✓)	(✓)	✓
`true`	(1)	(0)	(1)	(1)	·	(✓)	(✓)	(✓)	(✓)
`true`	(1)	(0)	(1)	(1)	1	(✓)	(✓)	(✓)	(✓)
`true`	(1)	(0)	(1)	(1)	(1)	(✓)	(✓)	(✓)	(✓)

Ergebnis: F ist erfüllbar durch die Belegung $x_1 = 1$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1$, $x_4 = 1$, $x_5 = 1$

Weitere Erfüllbarkeitsprobleme

Erfüllbarkeit von Formeln in 3-KNF (3-SAT)

Gegeben: Aussagenlogische Formel F in 3-KNF

Gefragt: Ist F erfüllbar?

Erfüllbarkeit von Formeln in KNF (KNF-SAT)

Gegeben: Aussagenlogische Formel F in KNF

Gefragt: Ist F erfüllbar?

Offen: Weder für 3-SAT noch für KNF-SAT ist ein effizienter Algorithmus bekannt

Polynomialzeit many-one Reduktionen

Definition. Seien A und B Sprachen über dem Alphabet Σ.

A ist in Polynomialzeit many-one reduzierbar auf B, symbolisch $A \leq_m^p B$, falls es eine Funktion $f : \Sigma^* \mapsto \Sigma^*$ gibt mit folgenden Eigenschaften:

- Für alle $x \in \Sigma^*$ gilt: $x \in A \iff f(x) \in B$
- f ist mittels einer Turing Maschine berechenbar, die auf allen Eingaben stoppt und für jede Eingabe x den Wert $f(x)$ zurückliefert
- Die Laufzeit der Turing Maschine bei Eingaben der Länge n ist $O(n^k)$ für eine Konstante $k > 0$.

Wichtige Eigenschaft der $\leq_m^p$ Reduktion

Satz. Falls $A \leq_m^p B$ und $B \in \mathrm{P}$, dann ist $A \in \mathrm{P}$.

Beweis. Sei $A \leq_m^p B$ mittels der Reduktionsfunktion f, die in $O(n^k)$ Schritten berechenbar ist. Sei M eine Turing Maschine mit $L(M) = B$ und einer Zeitkomplexität von $O(n^\ell)$

Betrachte die Turing Maschine M', die auf Eingabe x zuerst $y = f(x)$ berechnet und dann M auf Eingabe y ausführt.

Es gilt: $x \in A \iff M'$ akzeptiert x

Laufzeit für Eingaben der Länge n:

$$O(n^k) + O(O(n^k)^\ell) = O(n^{k \cdot \ell})$$

Somit: $A \in P$

Anwendung der $\leq_m^p$ Reduktion

Klar: 3-SAT $\leq_m^p$ KNF-SAT

Satz. KNF-SAT $\leq_m^p$ 3-SAT

Beweis. Sei F eine beliebige aussagenlogische Formel in KNF

Ansatz: Bearbeite jede Klausel K in F separat

Fall 1: $K = \ell_1$. Ersetze K durch die Klausel $(\ell_1 \vee \ell_1 \vee \ell_1)$

Fall 2: $K = (\ell_1 \vee \ell_2)$. Ersetze K durch die Klausel $(\ell_1 \vee \ell_2 \vee \ell_2)$

Fall 3: $K = (\ell_1 \vee \ell_2 \vee \ell_3)$. ✓

Anwendung der $\leq_m^p$ Reduktion (Forts.)

Fall 4: $K = (\ell_1 \vee \ell_2 \vee \ldots \vee \ell_k)$, wobei $k \geq 4$. Ersetze K durch die Klausel

$$(\ell_1 \vee \ell_2 \vee z_1) \wedge (\neg z_1 \vee \ell_3 \vee z_2) \\ \wedge (\neg z_2 \vee \ell_4 \vee z_3) \wedge \ldots \wedge (\neg z_{k-3} \vee \ell_{k-1} \vee \ell_k)$$

wobei $z_1, z_2, \ldots, z_{k-3}$ neue Variablen sind

Es gilt:

- F ist erfüllbar genau dann, wenn die modifizierte Formel F' erfüllbar ist
- Die Berechnung der modifizierten Formel F' ist in Polynomialzeit durchführbar

Beispiel zur Reduktion KNF-SAT $\leq_m^p$ 3-SAT

Beispiel. Gegeben ist die Formel

$$F = (x_1 \vee \neg x_2 \vee \neg x_3 \vee x_5 \vee \neg x_4) \wedge (x_1 \vee x_3)$$

Die Reduktion liefert die Formel

$$F' = (x_1 \vee \neg x_2 \vee z_1) \wedge (\neg z_1 \vee \neg x_3 \vee z_2) \wedge (\neg z_2 \vee x_5 \vee \neg x_4) \wedge (x_1 \vee x_3 \vee x_3)$$

Zusammenfassung

- P steht für die Klasse der effizient lösbaren Entscheidungsprobleme
- Effizient lösbar ist äquivalent zu in Polynomialzeit entscheidbar
- Polynomialzeit Many-one Reduktionen dienen zur (effizienten) Transformation des Wortproblems von einer Sprache auf eine andere
- Es gibt Probleme, von denen nicht bekannt ist, ob sie effizient lösbar sind