Berechenbarkeits- und Komplexitätstheorie

Lerneinheit 3: Komplexitätsklassen

Prof. Dr. Christoph Karg

Studiengang Informatik
Hochschule Aalen

Wintersemester 2015/2016

Einleitung

Diese Lerneinheit beschäftigt sich mit grundsätzlichen Fragestellungen der Komplexitätstheorie.

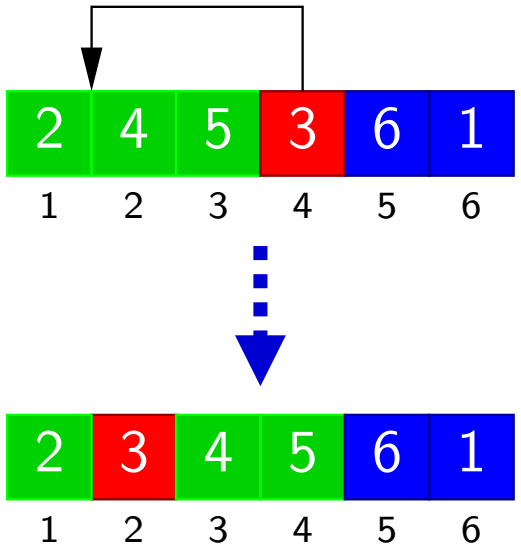
- Welche Arten von Ressourcen gibt es?
- Wie mißt man den Ressourcenverbrauch eines Algorithmus?
- Was versteht man unter einer Komplexitätsklasse?

Insertion Sort

Beispiel: Insertion Sort ist ein Algorithmus zur Lösung des Sortierproblems.

Idee: Konstruktion der sortierten Folge durch Einfügen eines Elements in eine bereits sortierte Teilfolge

Beispiel:

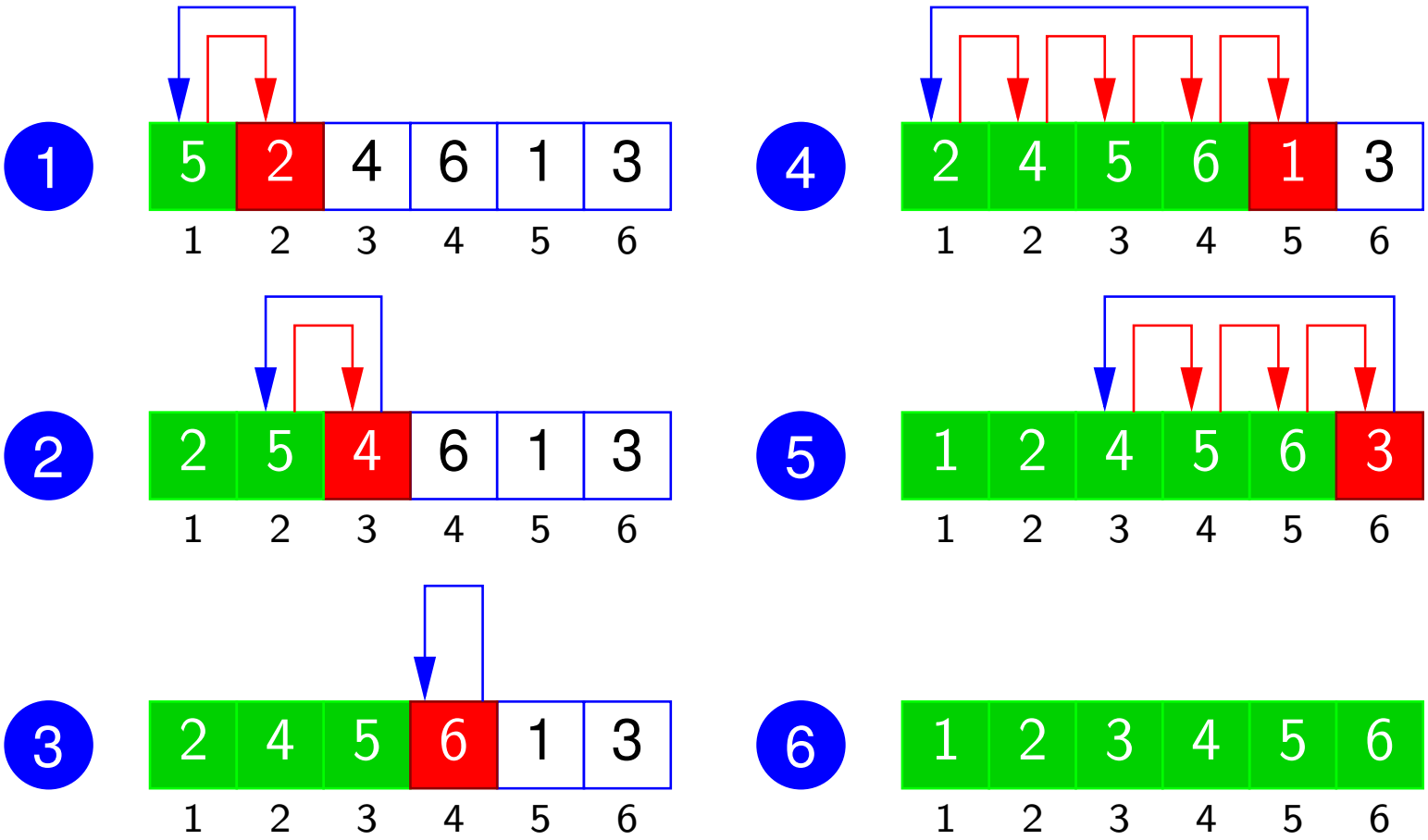


Insertion Sort Algorithmus

InsertionSort(A)
Input: Array A
Output: Array A in sortierter Form

```
1 for j := 2 to length(A) do
2     key := A[j]
3     i := j − 1
4     while (i > 0 and A[i] > key) do
5         A[i + 1] := A[i]
6         i := i − 1
7     A[i + 1] := key
```

Arbeitsweise von Insertion Sort



Analyse von Algorithmen

Die Analyse besteht aus zwei Teilen:

- Korrektheit: Zu zeigen ist, dass der Algorithmus für alle Instanzen des Problems eine korrekte Lösung berechnet
- Komplexität: Hier interessiert der Ressourcenverbrauch des Algorithmus. Wichtigste Ressource ist die Laufzeit, da sie über die Praxistauglichkeit des Algorithmus entscheidet

Korrektheit von Insertion Sort

Schleifeninvariante:

Zu Beginn jeder Iteration der for-Schleife in Zeile 1–7 enthält das Teilarray $A[1..j-1]$ die ursprünglichen Elemente von $A[1..j-1]$ in sortierter Form

Zu beweisen:

- Initialisierung: Die Invariante gilt vor dem ersten Schleifendurchlauf
- Aufrechterhaltung: Ist die Invarinate vor einer Iteration der Schleife wahr, dann ist sie auch nach der iteration wahr
- Beendigung: Wenn die Schleife endet, dann liefert die Invariante einen wichtigen Beitrag zur Korrektheit des Algorithmus

Korrektheitsbeweis: Initialisierung

Die Initialisierung ist der Zeitpunkt direkt vor dem ersten Ausführung der Schleife.

- Vor dem ersten Durchlauf wird die Variable j auf 2 gesetzt.
- Wegen $A[1..j-1] = A[1]$ enthält $A[1..j-1]$ exakt ein Element, nämlich das (usprüngliche) Element in $A[1]$.
- Da $A[1]$ nur ein Element enthält, ist das Array bereits sortiert.

Somit: Initialisierung ✓

Korrektheitsbeweis: Aufrechterhaltung

Annahme: $A[1..j-1]$ ist eine sortierte Folge der ursprünglichen Elemente in $A[1..j-1]$ und $2 \leq j < n$.

Betrachte den Schleifendurchlauf für $j+1$:

- Es wird das Element in $A[j]$ bearbeitet.
- Am Ende des Durchlaufs enthält $A[1..j]$ die ursprünglichen Elemente von $A[1..j]$.
- Um $A[j]$ einzufügen, wird in der while-Schleife ein i gesucht mit der Eigenschaft $A[i] \leq A[j] < A[i+1]$.
- Der Wert in $A[j]$ wird „zwischen“ $A[i]$ und $A[i+1]$ eingefügt, in dem die Werte in $A[i+1..j]$ entsprechend um eine Position nach rechts verschoben werden. Somit ist das Array $A[1..j]$ sortiert.

Also: Aufrechterhaltung ✓

Korrektheitsbeweis: Beendigung

Die Schleife endet, wenn $j = n + 1$.

Da die Invariante aufrecht erhalten bleibt, gilt:

> $A[1..n]$ enthält die ursprünglichen Elemente in sortierter Reihenfolge.

Somit ist das komplette Array sortiert.

Fazit: Der Algorithmus InsertionSort liefert das geforderte Ergebnis. Er ist also korrekt.

Analyse der Laufzeit eines Algorithmus

- Die Laufzeit eines Algorithmus ist ein wichtiges Kriterium für dessen Praxistauglichkeit
- Die Laufzeit ist die Anzahl der Elementaroperationen, die der Algorithmus zur Verarbeitung einer gegebenen Probleminstanz ausführt
- Eine Elementaroperation ist eine maschinen- und programmiersprachenunabhängige Maßeinheit
- Die Laufzeit wird in Abhängigkeit der Größe der zu verarbeitenden Probleminstanz gemessen
- Die Eingabegröße ist eine naheliegende Kennzahl z.B. Anzahl der Elemente in einem Feld, Anzahl Knoten in einem Graphen

Analyse von Insertion Sort

Zeile	Aufwand
for $j := 2$ **to** $length(A)$ **do**	n
$key := A[j]$	$n-1$
$i := j-1$	$n-1$
while $(i > 0$ **and** $A[i] > key)$ **do**	$\sum_{j=2}^{n} t_j + 1$
$A[i+1] := A[i]$	$\sum_{j=2}^{n} t_j$
$i := i-1$	$\sum_{j=2}^{n} t_j$
$A[i+1] := key$	$n-1$

t_j = Anzahl der Durchläufe der while-Schleife im Durchgang j

Gesamt:

$$T(n) = 4n - 3 + \sum_{j=2}^{n} (3t_j + 1) \text{ Elementaroperationen}$$

Analyse von Insertion Sort (Forts.)

Beobachtung: Laufzeit ist abhängig von der Anzahl der Durchläufe der while Schleife

Drei Abschätzungen:

- Bester Fall (Best Case): Wieviele Operationen werden mindestens ausgeführt?
- Schlimmster Fall (Worst Case): Wieviele Operationen werden höchstens ausgeführt?
- Durchschnittsfall (Average Case): Wieviele Operationen werden im Mittel ausgeführt?

Alle Abschätzungen erfolgen in Abhängigkeit der Eingabegröße.

Bester Fall

Ist A bereits sortiert, dann wird die while-Schleife nie durchlaufen.

Also ist $t_j = 0$ für alle j. Die Laufzeit ist

$$T_{BC}(n) = 4n - 3 + \sum_{j=2}^{n} 1 = 5n - 4$$

Die Laufzeit ist linear, da $T_{BC}(n) = an + b$, wobei a, b konstant.

Schlimmster Fall

Ist A in umgekehrter Reihenfolge sortiert, d.h.

$$A[1] \geq A[2] \geq \ldots \geq A[n]$$

dann wird die while-Schleife immer solange durchlaufen bis $i = 0$ gilt.

Also ist $t_j = j$ für alle j. Die Laufzeit ist

$$T_{WC}(n) = 4n - 3 + \sum_{j=2}^{n} (3j + 1)$$

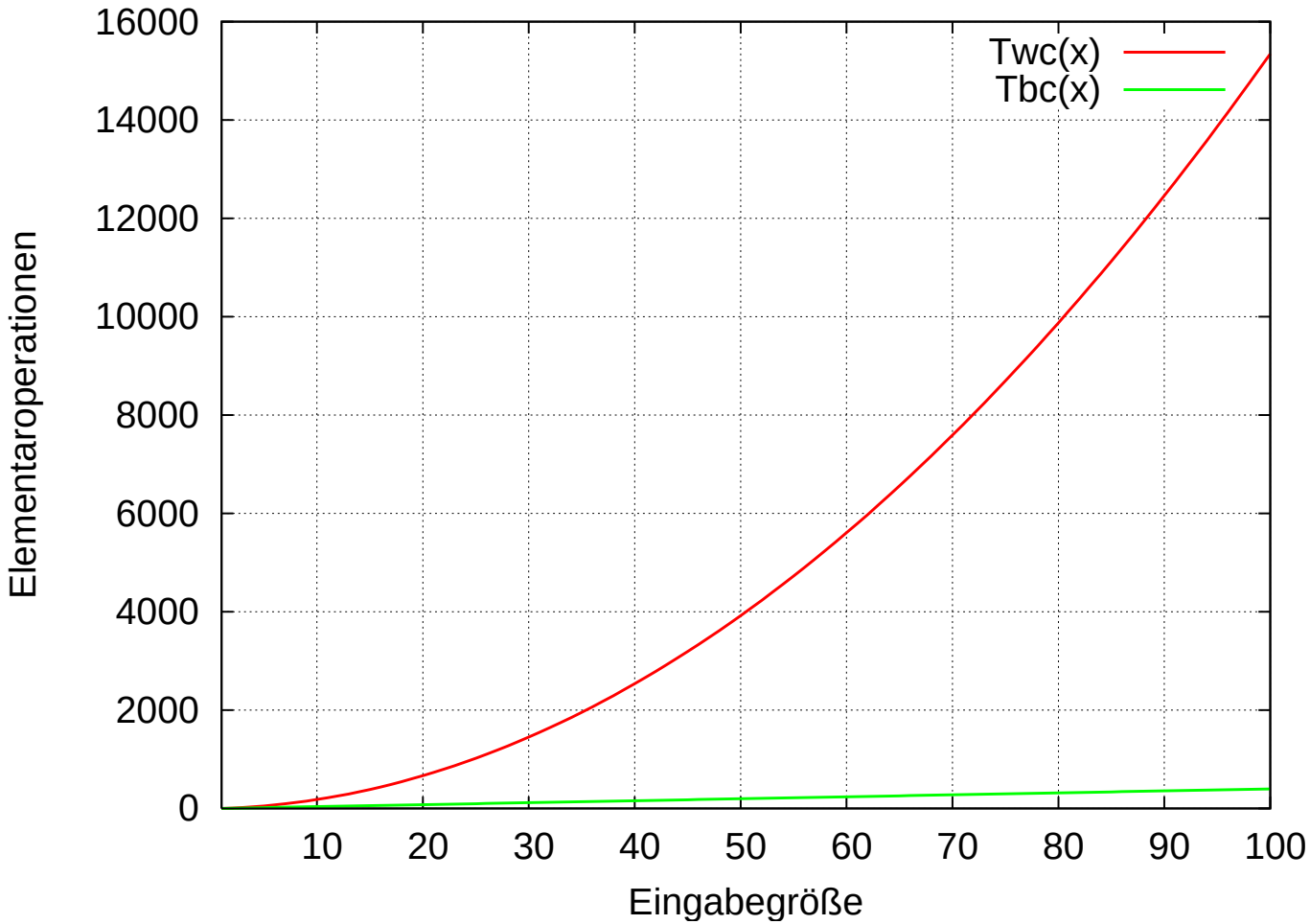
Schlimmster Fall (Forts.)

Umformen:

$$\begin{aligned} T_{WC}(n) &= 4n - 3 + n - 1 + 3 \sum_{j=2}^{n} j \\ &= 5n - 4 + 3 \left(\frac{n(n+1)}{2} - 1 \right) \\ &= \frac{3}{2} n^2 + \frac{13}{2} n - 7 \end{aligned}$$

Die Laufzeit ist quadratisch, da $T_{WC}(n) = an^2 + bn + c$ wobei a, b, c konstant sind.

Zwischenbilanz



Fakt: Die tatsächliche Laufzeit für eine Eingabe der Größe n liegt irgendwo zwischem besten und schlimmsten Fall.

Zwischenbilanz (Forts.)

Beispiel: Laufzeit von Insertion Sort unter der Annahme, dass die Ausführung einer Elementaroperation 0.001 Sekunden dauert.

n	$T_{BC}(n)$	$Z_{min}(n)$ [sec]	$T_{WC}(n)$	$Z_{max}(n)$ [sec]
50	99	0.099	3912	3.921
100	199	0.199	15346	15.346
500	999	0.999	37674	37.674
1000	1999	1.999	1503496	1503.496
5000	9999	9.999	37517496	37517.496

Frage: Tendiert die Laufzeit von Insertion Sort zu linear oder zu quadratisch?

$\rightsquigarrow$ Analyse des Durchschnittsfalls

Durchschnittsfall

Annahmen:

- Die Elemente des Arrays A sind paarweise verschieden, d.h., $A[i] \neq A[j]$ für alle $1 \leq i < j \leq n$.
- Jede Permutation der Elemente des Arrays ist gleichwahrscheinlich. Eine konkrete Belegung des Arrays tritt also mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{n!}$ auf.
- Idee hinter der Verteilung: „Ziehen der Elemente ohne Zurücklegen“

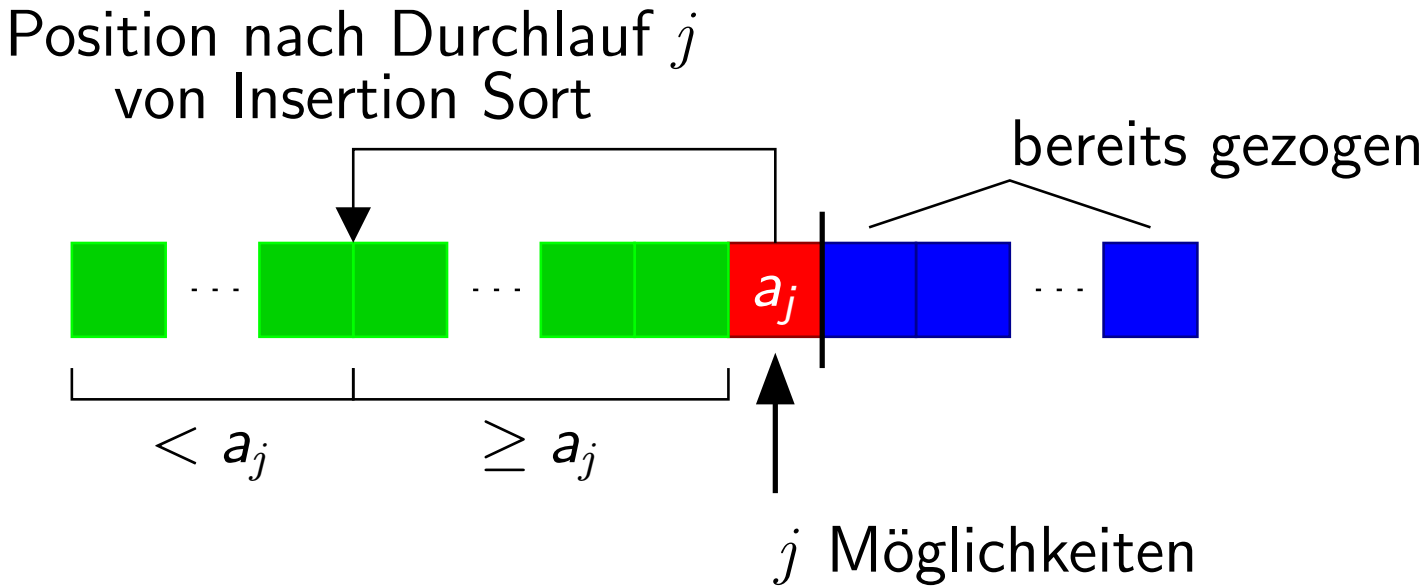
Aufgabe: Berechnung der zu erwartenden Durchläufe der while-Schleife in Abhängigkeit von j

Durchschnittsfall (Forts.)

Situation nach $n - j$ gezogenen Elementen: es sind noch j Elemente zu verteilen.

Beobachtung: Die Anzahl der Durchläufe der while-Schleife in Durchgang j hängt ab von der Ordnung von a_j bezüglich der restlichen $j - 1$ Elemente.

Begründung:



Durchschnittsfall (Forts.)

Zufallsvariable X_j: Anzahl der Durchläufe der while-Schleife in Durchgang j

Da das j-te Element unter Gleichverteilung gezogen wird, gilt

$$Prob\left[X_j = k\right] = \frac{1}{j}$$

für alle $k = 0, \ldots, j-1$

Somit:

$$Exp\left[X_j\right] = \sum_{k=0}^{j-1} k \cdot Prob\left[X_j = k\right] = \sum_{k=0}^{j-1} \frac{k}{j} = \frac{j-1}{2}$$

Durchschnittsfall (Forts.)

Es gilt: Der Erwartungswert der Anzahl der Durchläufe der while-Schleife in Durchgang j ist

$$t_j = \frac{j-1}{2}$$

Somit:

$$T_{AC}(n) = 4n - 3 + \sum_{j=2}^{n} \left(\frac{3(j-1)}{2} + 1 \right)$$

Durchschnittsfall (Forts.)

Umformen:

$$\begin{aligned} T_{AC}(n) &= 4n-3+n-1+\frac{3}{2}\sum_{j=2}^{n}(j-1) \\ &= 5n-4+\frac{3}{2}\sum_{j=1}^{n-1} j \\ &= 5n-4+\frac{3}{2}\cdot\frac{(n-1)n}{2} \\ &= \frac{3}{4}n^2+\frac{17}{4}n-4 \end{aligned}$$

Somit: Im Mittel ist die Laufzeit von Insertion Sort quadratisch.

Ergebnis

Laufzeitverhalten von Insertion Sort:

- Bester Fall: linear

$$T_{BC}(n) = 5n - 4$$

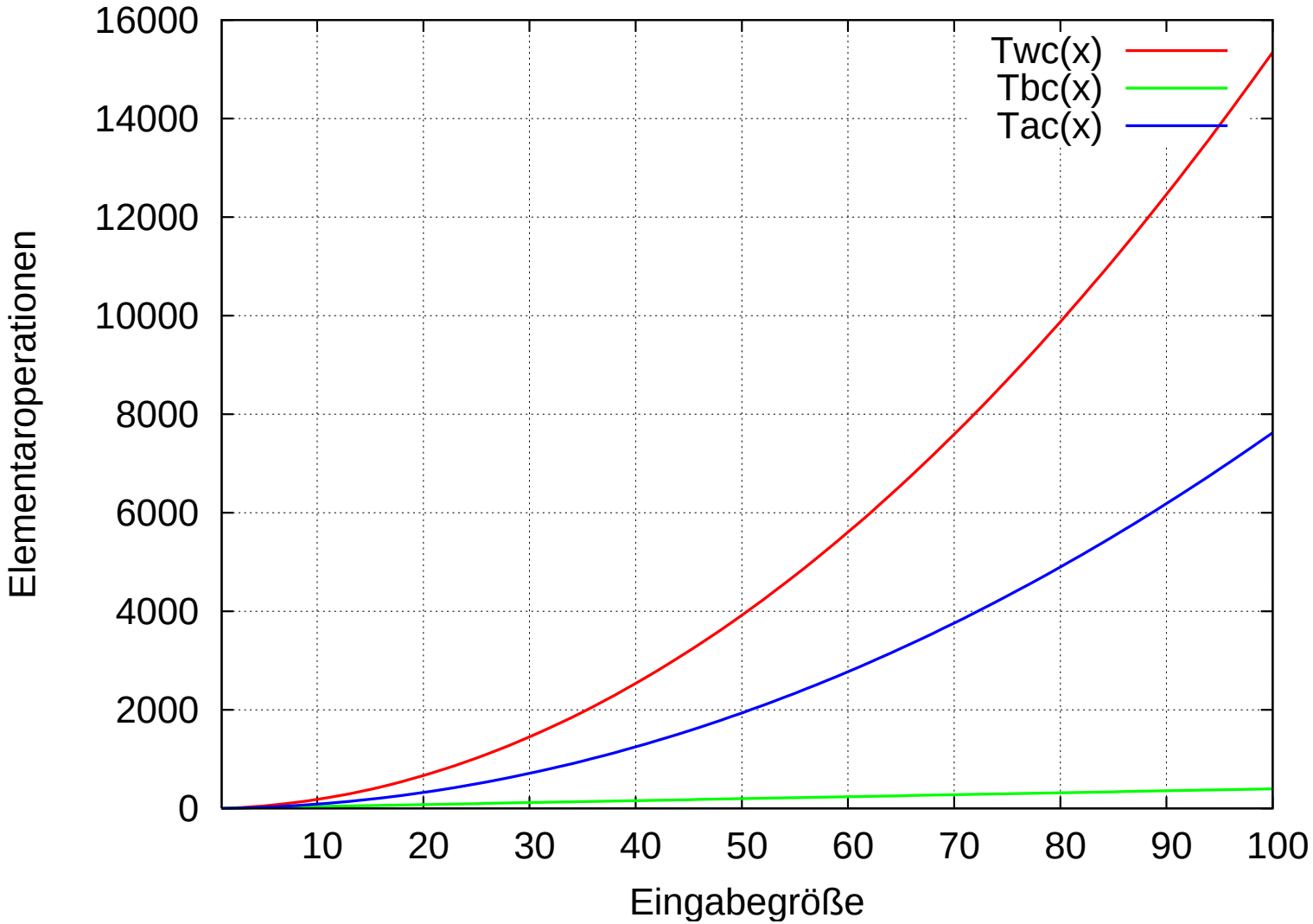
- Schlimmster Fall: quadratisch

$$T_{WC}(n) = \frac{3}{2}n^2 + \frac{13}{2}n - 7$$

- Durchschnittsfall: quadratisch

$$T_{AC}(n) = \frac{3}{4}n^2 + \frac{5}{4}n - 1$$

Ergebnis in grafischer Form



Worst Case Komplexität

Die Performance eines Algorithmus wird in der Regel anhand dessen Worst Case Laufzeit beurteilt.

Gründe:

- Der Worst Case ist eine obere Schranke für die Laufzeit des Algorithmus auf alle Eingaben
- Bei vielen Algorithmen tritt das Worst Case Verhalten bei den meisten Eingaben auf
- Oft das Laufzeitverhalten im Average Case (fast) identisch mit dem Verhalten im Worst Case
- Die Worst Case Analyse ist oft einfacher durchzuführen als die Average Case Analyse

Asymptotische Notation

Ziel: Entwicklung eines Komplexitätsmaßes zum Vergleich von Algorithmen

Anforderung: Komplexitätsmaß muss unabhängig sein von:

- Programmiersprache
- Compiler
- Prozessortyp

Idee: Vereinfache die Komplexitätsfunktion durch

- Weglassen von Termen niedrigerer Ordnung
- Ingnorieren von multiplikativen Konstanten

Asymptotische Notation (Forts.)

Beispiel: Betrachte die Laufzeit von Insertion Sort

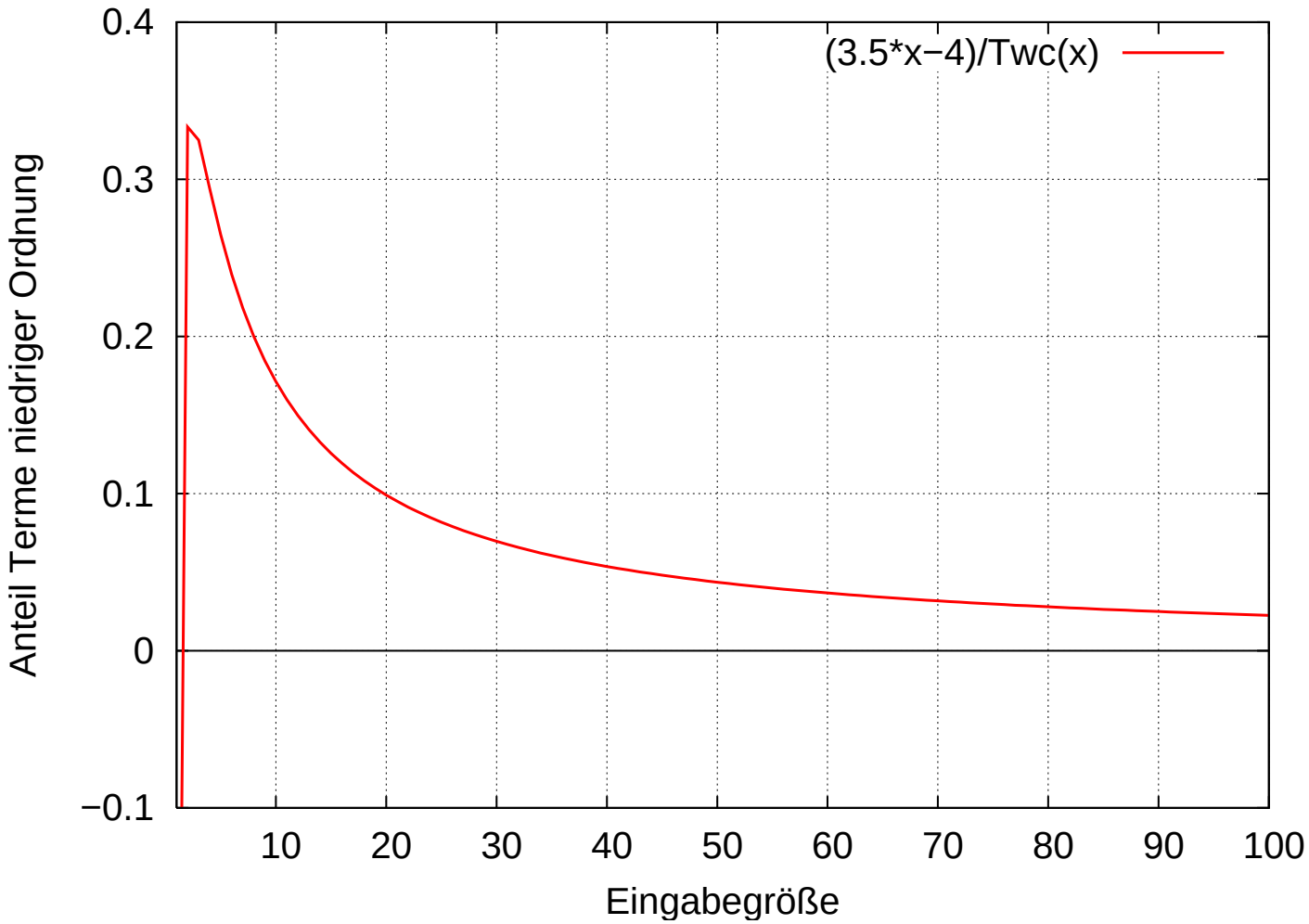
$$T_{WC}(n) = \frac{3}{2}n^2 + \frac{7}{2}n - 4$$

- Der Beitrag der Terme niederer Ordnung $\frac{7}{2}n - 4$ zu $T_{WC}(n)$ geht für $n \to \infty$ gegen 0 (siehe nächste Folie).
- Der Faktor $\frac{3}{2}$ verändert nicht das quadratische Verhalten der von $T_{WC}(n)$.
- Die Laufzeit von Insertion Sort nimmt (im schlimmsten Fall) quadratisch mit der Eingabegröße zu.

Ergebnis: Insertion Sort hat eine asymptotische obere Schranke von n^2.

Asymptotische Notation (Forts.)

Anteil von $\frac{7}{2}n - 4$ an $T_{WC}(n)$:



O-Notation

Sei f eine Abbildung von $\mathbb{N}$ nach $\mathbb{R}^+$.

$O(f)$ ist die Menge aller Funktionen g mit folgender Eigenschaft:

> Es gibt zwei Konstanten $c > 0$ und $n_0 > 0$ so dass für alle $n \geq n_0$ gilt: $0 \leq g(n) \leq c \cdot f(n)$.

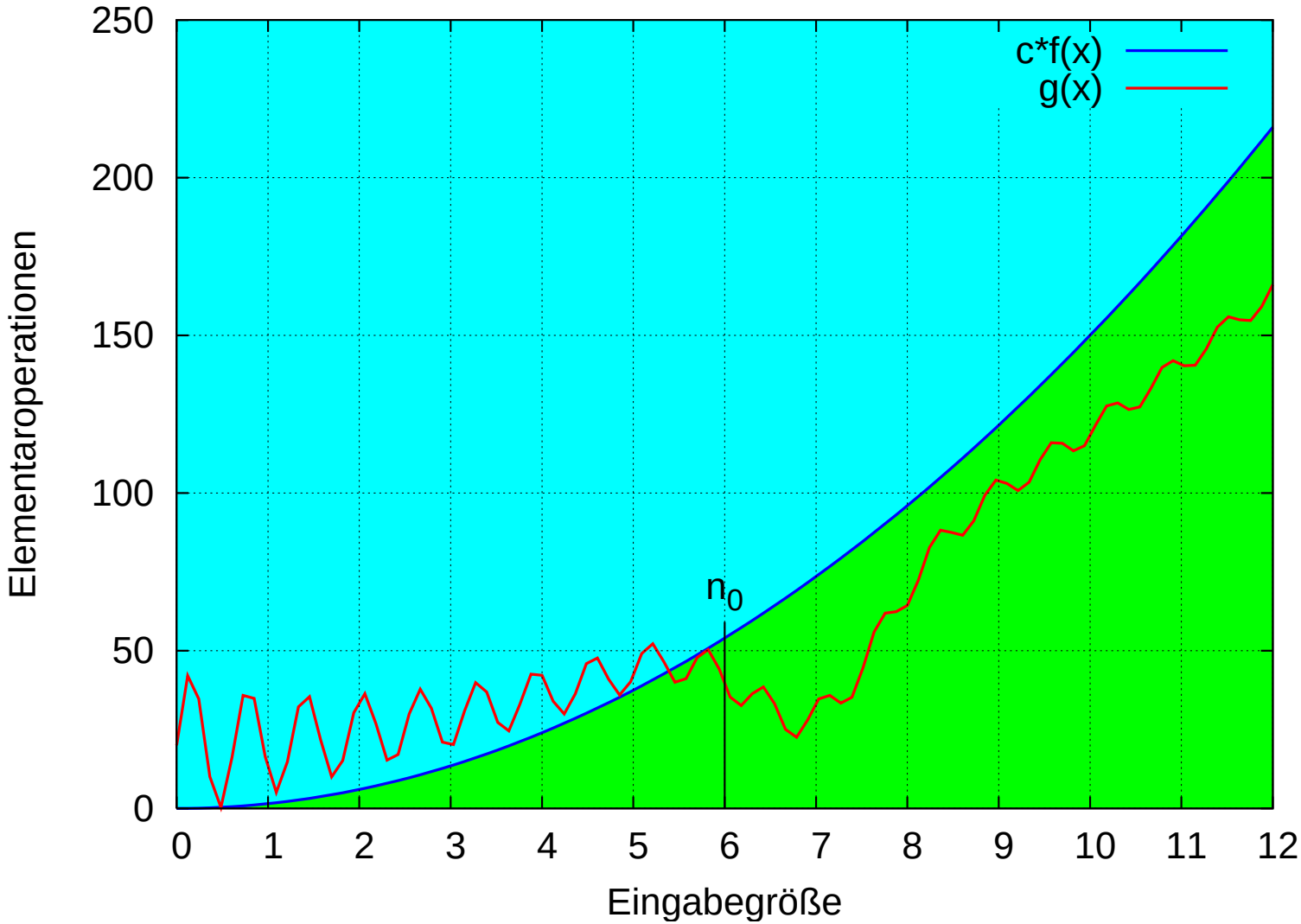
Formal:

$$O(f) = \{g \mid \exists c > 0\, \exists n_0 > 0\, \forall n \geq n_0 : 0 \leq g(n) \leq c \cdot f(n)\}$$

Ist $g \in O(f)$, dann nennt man f asymptotische obere Schranke von g.

Beachte: Man schreibt oft $g(n) = O(f(n))$ anstatt $g(n) \in O(f(n))$.

O-Notation (Forts.)



O-Notation: Beispiele

Beispiel: $n^2 + n + 2 \in O(n^2)$:

Lösung 1: Abschätzen. Es gilt:

$$n^2 + n + 2 \leq n^2 + n^2 + 2n^2 = 4n^2$$

Somit: $c = 5$, $n_0 = 1$

Lösung 2: Nullstellen berechnen.

$$\begin{aligned} c \cdot n^2 &\geq n^2 + n + 2 \\ (c-1)n^2 - n - 2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Mitternachtsformel:

$$n_0 = \frac{1 + \sqrt{1 + 4(c-1)2}}{2(c-1)}$$

O-Notation: Beispiele (Forts.)

Ergebnis: Gleichung lösbar für alle $c > 1$

$\rightsquigarrow$ es gibt unendlich viele $\langle c, n_0 \rangle$ Paare. Hier eine Auswahl:

c	n_0
1.1	12
1.001	1002
1.0001	10002

Bemerkung: In vielen Fällen ist das Lösen der Gleichung deutlich aufwändiger als das Abschätzen.

O-Notation: Beispiele (Forts.)

Beispiel: $n \in O(n^2)$: Es gilt $n \leq n^2$ für alle n. Wähle $c = 1$, $n_0 = 1$.

Beispiel: $n^3 \notin O(n^2)$: Angenommen, doch! Dann existieren Konstanten $c > 0$ und $n_0 > 0$ so das für alle $n \geq n_0$

$$n^3 \leq c \cdot n^2$$

gilt.

Umformen: $n \leq c \rightsquigarrow$ Widerspruch für alle $n \geq c + 1$

O-Notation: Beispiele (Forts.)

Beispiel: $n^3 \in O(2^n)$: Auch hier gibt es unendlich viele $\langle c, n_0 \rangle$ Paare.

Begründung: Für alle $c > 0$ gilt:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{n^3}{c \cdot 2^n} = 0$$

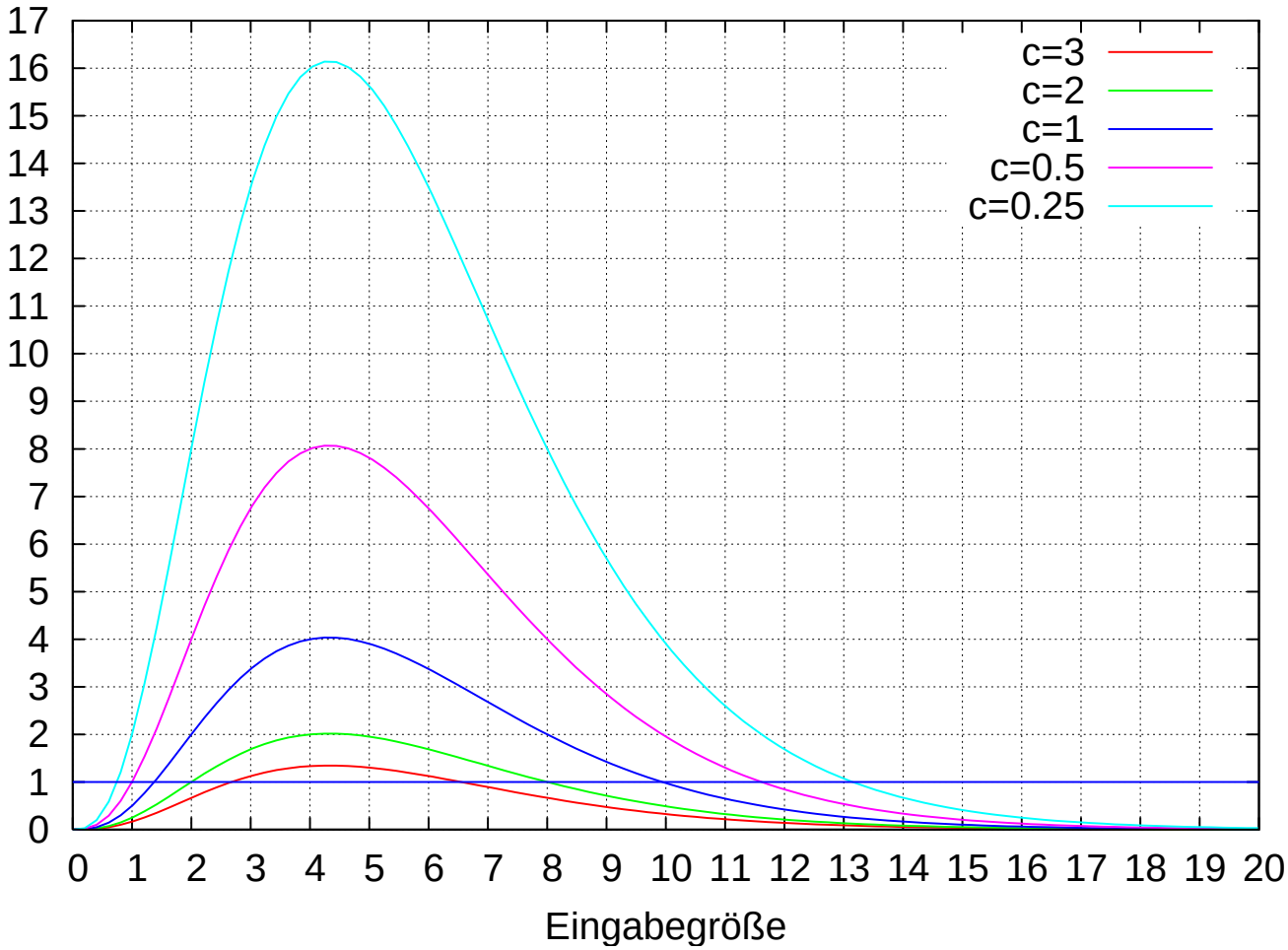
Für jedes noch so kleine $c > 0$ gibt es ein n_0 so dass

$$c \cdot 2^n \geq n^3$$

für alle $n \geq n_0$.

O-Notation: Beispiele (Forts.)

Funktionsplots für $\frac{n^3}{c \cdot 2^n}$:



Ω-Notation

Sei f eine Abbildung von $\mathbb{N}$ nach $\mathbb{R}^+$.

$\Omega(f)$ ist die Menge aller Funktionen g mit folgender Eigenschaft:

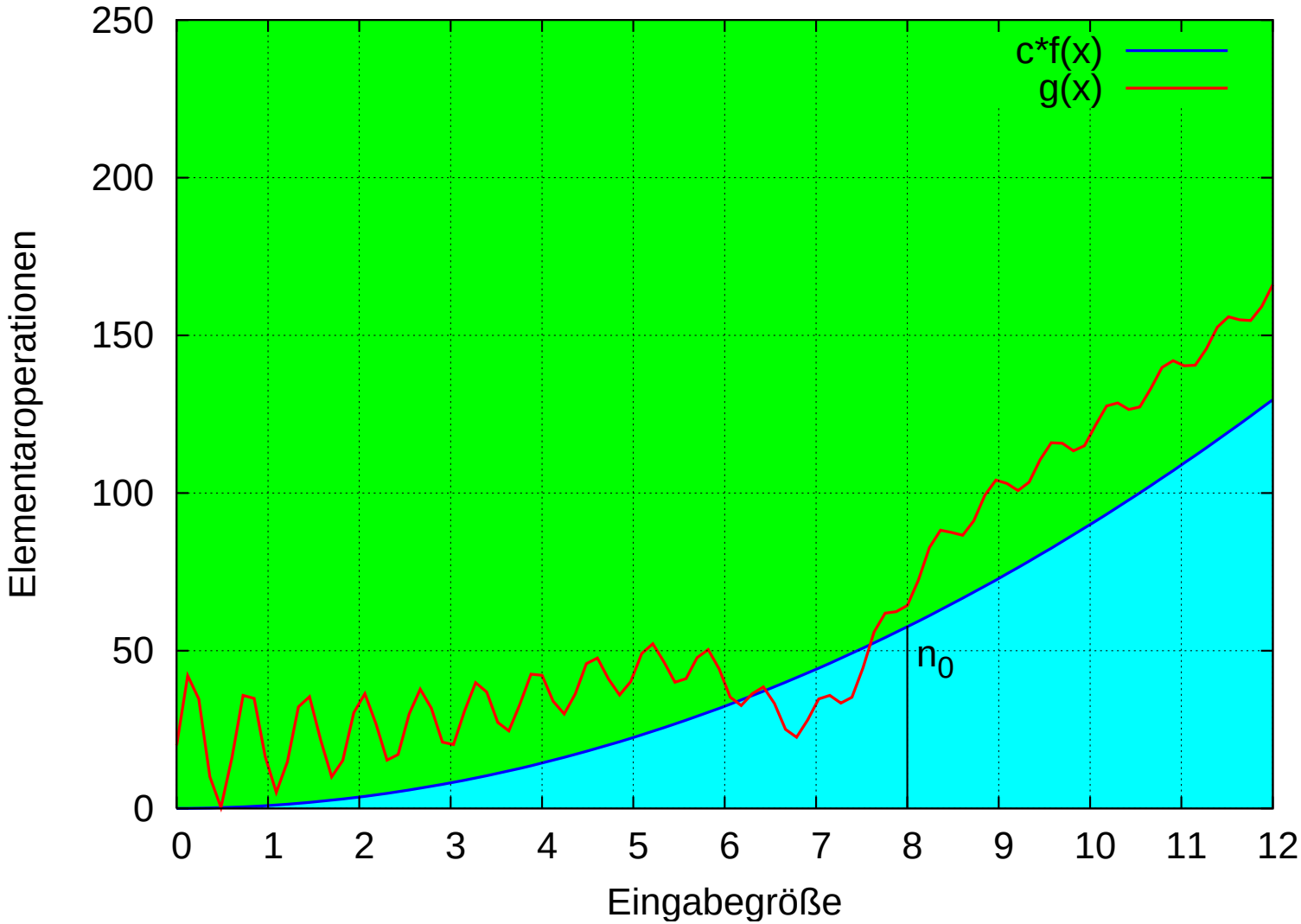
> Es gibt zwei Konstanten $c > 0$ und $n_0 > 0$ so dass für alle $n \geq n_0$ gilt: $0 \leq c \cdot f(n) \leq g(n)$.

Formal:

$$\Omega(f) = \{g \mid \exists c > 0\, \exists n_0 > 0\, \forall n \geq n_0 : 0 \leq c \cdot f(n) \leq g(n)\}$$

Ist $g \in \Omega(f)$, dann nennt man f asymptotische untere Schranke von g.

Ω-Notation (Forts.)



Ω-Notation: Beispiele

Beispiel: $n^2 + n + 2 = \Omega(n^2)$, da $n^2 + n + 2 \geq n^2$ für alle $n \geq 1$.

Beispiel: $n^2 \in \Omega(n \log_2 n)$

Es gilt: $2^n = 1 + \sum_{i=0}^{n-1} 2^i \geq n$.

Somit: $n \geq \log_2 n$.

Abschätzen: $n^2 = n \cdot n \geq n \log_2 n$

Beispiel: $n^3 \notin \Omega(2^n)$: Angenommen, doch. Dann gibt es Konstanten $c > 0$ und $n_0 > 0$, so dass $n^3 \geq c \cdot 2^n$ für alle $n \geq n_0$.

Dies steht jedoch im Widerspruch zu der Tatsache, dass

$$\lim_{n \to \infty} \frac{c \cdot 2^n}{n^3} \to \infty$$

Θ-Notation

Sei f eine Abbildung von $\mathbb{N}$ nach $\mathbb{R}^+$.

$\Theta(f)$ ist die Menge aller Funktionen g mit folgender Eigenschaft:

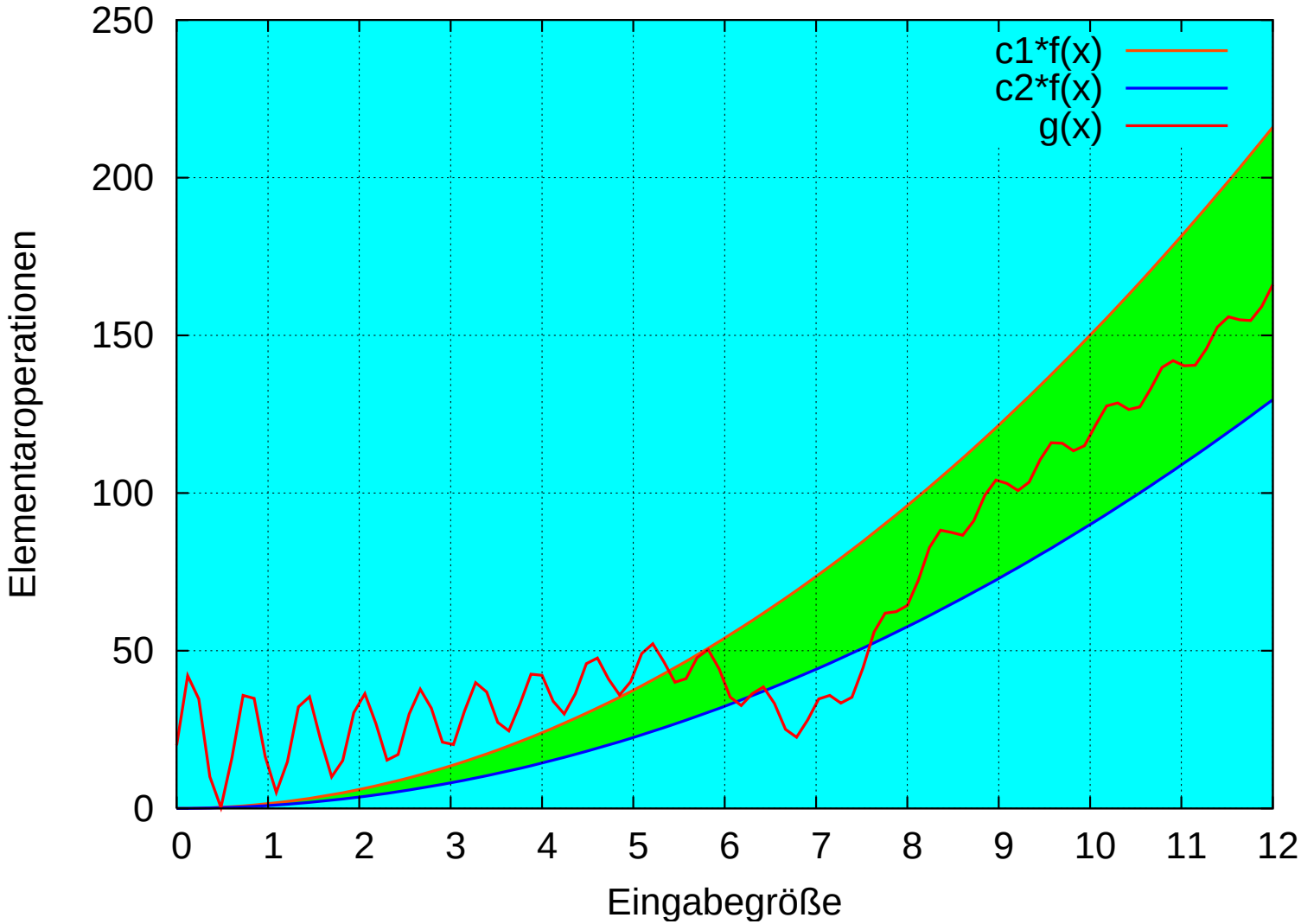
> Es gibt Konstanten $c_1 > 0$, $c_2 > 0$ und $n_0 > 0$ so dass für alle $n \geq n_0$ gilt:
> $0 \leq c_1 \cdot f(n) \leq g(n) \leq c_2 \cdot f(n)$.

Formal:

$$\Theta(f) = \left\{ g \;\middle|\; \begin{array}{r} \exists c_1, c_2 > 0 \, \exists n_0 > 0 \, \forall n \geq n_0 : \\ 0 \leq c_1 \cdot f(n) \leq g(n) \leq c_2 \cdot f(n) \end{array} \right\}$$

Ist $g \in \Theta(f)$, dann nennt man f asymptotische dichte Schranke von g.

Θ-Notation (Forts.)



Θ-Notation (Forts.)

Satz: Für beliebige Funktionen $g(n)$ und $f(n)$ gilt:

$f(n) = \Theta(g(n))$ genau dann, wenn $f(n) = O(g(n))$ und $f(n) = \Omega(g(n))$.

Beweis. "$\Rightarrow$": ✓

"$\Leftarrow$":

- Da $f(n) = \Omega(g(n))$, gibt es eine Konstante $c_1 > 0$ so dass $0 \leq c_1 \cdot g(n) \leq f(n)$ für alle $n \geq n_0$.
- Da $f(n) = O(g(n))$, gibt es eine Konstante $c_2 > 0$ so dass $0 \leq f(n) \leq c_2 \cdot g(n)$ für alle $n \geq n_0$.

Somit: $0 \leq c_1 \cdot g(n) \leq f(n) \leq c_2 \cdot g(n)$

Fazit: $f(n) = \Theta(g(n))$

Relationen

Reflexivität

- $f(n) = O(f(n))$
- $f(n) = \Omega(f(n))$
- $f(n) = \Theta(f(n))$

Transitivität

- Falls $f(n) = O(g(n))$ und $g(n) = O(h(n))$, dann $f(n) = O(h(n))$.
- Falls $f(n) = \Omega(g(n))$ und $g(n) = \Omega(h(n))$, dann $f(n) = \Omega(h(n))$.
- Falls $f(n) = \Theta(g(n))$ und $g(n) = \Theta(h(n))$, dann $f(n) = \Theta(h(n))$.

Relationen (Forts.)

Symmetrie

- $f(n) = \Theta(g(n))$ genau dann, wenn $g(n) \in \Theta(f(n))$

Transponierte Symmetrie

- $f(n) = O(g(n))$ genau dann, wenn $g(n) = \Omega(f(n))$

Analogie zu reellen Zahlen:

$$
\begin{aligned}
f(n) = O(g(n)) &\quad \rightsquigarrow \quad a \leq b \\
f(n) = \Omega(g(n)) &\quad \rightsquigarrow \quad a \geq b \\
f(n) = \Theta(g(n)) &\quad \rightsquigarrow \quad a = b
\end{aligned}
$$

Laufzeitschranken

Die folgende Tabelle enthält gängige Laufzeitschranken und deren informelle Bezeichnung:

$O(1)$	konstant
$O(\log n)$	logarithmisch
$O(n)$	linear
$O(n \log n)$	quasi-linear
$O(n^2)$	quadratisch
$O(n^3)$	kubisch
$O(2^n)$	exponentiell

Ziel bei der Komplexitätsanalyse ist es, eine möglichst dichte obere Schranke anzugeben.

Wann ist ein Algorithmus effizient?

Zu Beantwortung dieser Frage betrachten wir folgende Tabelle:

Algorithmus	*Komplexität*	*DS/h*	*DS/h (Faktor* 1000*)*
A_1	$O(n)$	n_1	$1000n_1$
A_2	$O(n^2)$	n_2	$\sqrt{1000} \cdot n_2 = 31.6n_2$
A_3	$O(n^3)$	n_3	$\sqrt[3]{1000} \cdot n_3 = 10n_3$
A_4	$O(2^n)$	n_4	$n_4 + \log_2 1000 = n_4 + 10$

- DS/h steht für die maximale Eingabegröße, die der Algorithmus in einer Stunde bewältigen kann.
- Faktor 1000 steht für die Verbesserung bei Einsatz eines 1000-mal schnelleren Computers.

Beobachtung

Die obige Tabelle liefert folgende Erkenntnisse:

- Bei Algorithmen mit Komplexität $O(n^k)$ erzielt man eine Verbesserung um einen Faktor, der von der ursprünglichen Eingabegröße x und k abhängt. Dieser Faktor ist gleich $\sqrt[k]{x}$
- Bei dem Algorithmus mit Komplexität $O(2^n)$ ist die erzielte Verbesserung additiv. Die Eingabegröße erhöht sich um $\log_2 x$

Definition von Effizienz

Definition:

Ein Algorithmus A ist effizient, falls seine Zeitkomplexität $T_A(n)$ Polynomialzeit-beschränkt ist, d.h., dass $T_A(n) \in O(n^k)$ für eine Konstante $k > 0$

Bemerkungen:

- Diese Definition ist robust. Werden effiziente Algorithmen kombiniert, dann ist das Ergebnis wiederum ein effizienter Algorithmus
- Diese Definition ist eine mathematische Idealisierung. Ein Algorithmus mit Laufzeit $O(n^{1000})$ ist sicherlich nicht mehr praktikabel

Komplexitätstheorie

Aufgabe: Einteilung der entscheidbaren Probleme anhand des Ressourcenverbrauchs, der bei ihrer Verarbeitung anfällt

Ressourcen:

- Rechenzeit
- Speicherplatz
- Kommunikationsaufwand
- ...

Der Verbrauch wird in Abhängigkeit der Eingabe bzw. deren Länge gemessen

Annahme: Die Eingaben werden über einem Alphabet Σ kodiert

Komplexitätsklassen

Definition. Eine Komplexitätsklasse $\mathcal{C}$ über dem Alphabet Σ ist eine Menge von Sprachen über Σ, d.h., $\mathcal{C} \subseteq P(\Sigma^*)$

Unterscheidung zwischen

- Determinismus und
- Nichtdeterminismus

sowie zwischen

- Rechenzeit und
- Speicherplatz

Ressourcenfunktion: Funktion der Bauart

- $\mathbb{N} \mapsto \mathbb{N}$ oder
- $\Sigma^* \mapsto \mathbb{N}$

Zeitkonstruierbare Funktionen

Definition. Eine Abbildung $t : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{N}$, wobei $t(n) \geq kn \log_2(n)$ für eine Konstante $k > 0$. t nennt man zeitkonstruierbar, falls es eine deterministische Turing Maschine M gibt, die auf Eingabe 1^n in Laufzeit $O(t(n))$ den Wert $t(n)$ in Binärdarstellung berechnet

Fakt: Alle gängigen Funktionen $t(n)$ mit $t(n) \geq n \log_2 n$ sind zeitkonstruierbar, z.B. $n \log_2 n$, $n\sqrt{n}$, n^2 und 2^n

Anwendung: Einsatz als Count-Down Zähler in Algorithmen $\rightsquigarrow$ Beschränkung der Rechenzeit auf eine vorgegebene Anzahl von Rechenschritten

Beispiel: n^2 ist zeitkonstruierbar

Beispiel: Algorithmus zur Berechnung von $t(n) = n^2$

$\textsc{TimeSquare}(1^n)$
Input: Natürliche Zahl $n \geq 1$ in Unärkodierung
Output: Wert von $t(n)$ in Binärkodierung

1 $s := 0$;
2 *Scanne die Eingabe von links nach rechts und erhöhe für jede gelesene 1 den Zähler s um 1*
3 $t := 0$
4 **for** $i := 1$ **to** s **do**
5 $\quad t := t + s$
6 **return** t

Beispiel: n^2 ist zeitkonstruierbar (Forts.)

Korrektheit: Da $s = n$, gilt:

$$t = \sum_{i=1}^{n} n = n^2$$

Laufzeit:

- Scannen der Eingabe und s inkrementieren: $O(n \cdot \log_2 n)$
- Berechnen von t: $O(n \log_2 n)$

Gesamt: $O(n \cdot \log_2 n)$

Beispiel: n^2 ist zeitkonstruierbar (Forts.)

Anwendung: Stoppuhr bei der Simulation von Turing Maschinen

$\textsc{Simulate}(\langle M, x \rangle)$

Input: Turing Maschine M mit zugehöriger Eingabe x

Output: `true`, falls M das Wort x in $\leq |x|^2$ Schritten akzeptiert, `false`, sonst.

```
1 timer := TimeSquare(1^|x|)
2 C := Startkonfiguration von M auf Eingabe x
3 while (timer > 0) do
4   if (C ist eine akzeptierende Konfiguration) then
5     return true
6   C := Folgekonfiguration von C
7   timer := timer − 1
8 return false
```

Zeitkomplexität

Definition. Sei M eine deterministische Turing Maschine, die auf allen Eingaben hält. Die Laufzeit (Zeitkomplexität) von M ist eine Funktion $f : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{N}$ mit der Eigenschaft, dass M bei allen Eingaben der Länge n höchstens $O(f(n))$ Rechenschritte durchläuft.

Man unterscheidet:

- Zeitkomplexität eines Algorithmus
- Zeitkomplexität eines Entscheidungsproblems

Definition. Sei $t : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{N}$ eine beliebige zeitkonstruierbare Abbildung. Die Menge DTIME$(t(n))$ enthält alle Sprachen, die durch eine deterministische Einband Turing Maschine mit Zeitkomplexität $t(n)$ entscheidbar sind.

Einband vs. Mehrband Turing Maschinen

Satz. Sei L eine Sprache, die durch eine deterministische k-Band Turing Maschine M akzeptiert wird. Angenommen, M verarbeitet jede Eingabe der Länge n in $t(n)$ Rechenschritten. Dann ist $L \in \text{DTIME}(t(n)^2)$.

Beweis. Betrachte die deterministische Einband Turing Maschine M', die M simuliert, indem sie den Inhalt der k Arbeitsbänder hintereinander auf ihr Arbeitsband schreibt

Beobachtung: Da M höchstens $t(n)$ Rechenschritte ausführt, kann sie pro Arbeitsband höchstens $t(n)$ Zellen beschreiben $\rightsquigarrow$ M' belegt höchstens $O(k \cdot t(n))$ Speicherzellen

Einband vs. Mehrband Turing Maschinen (Forts.)

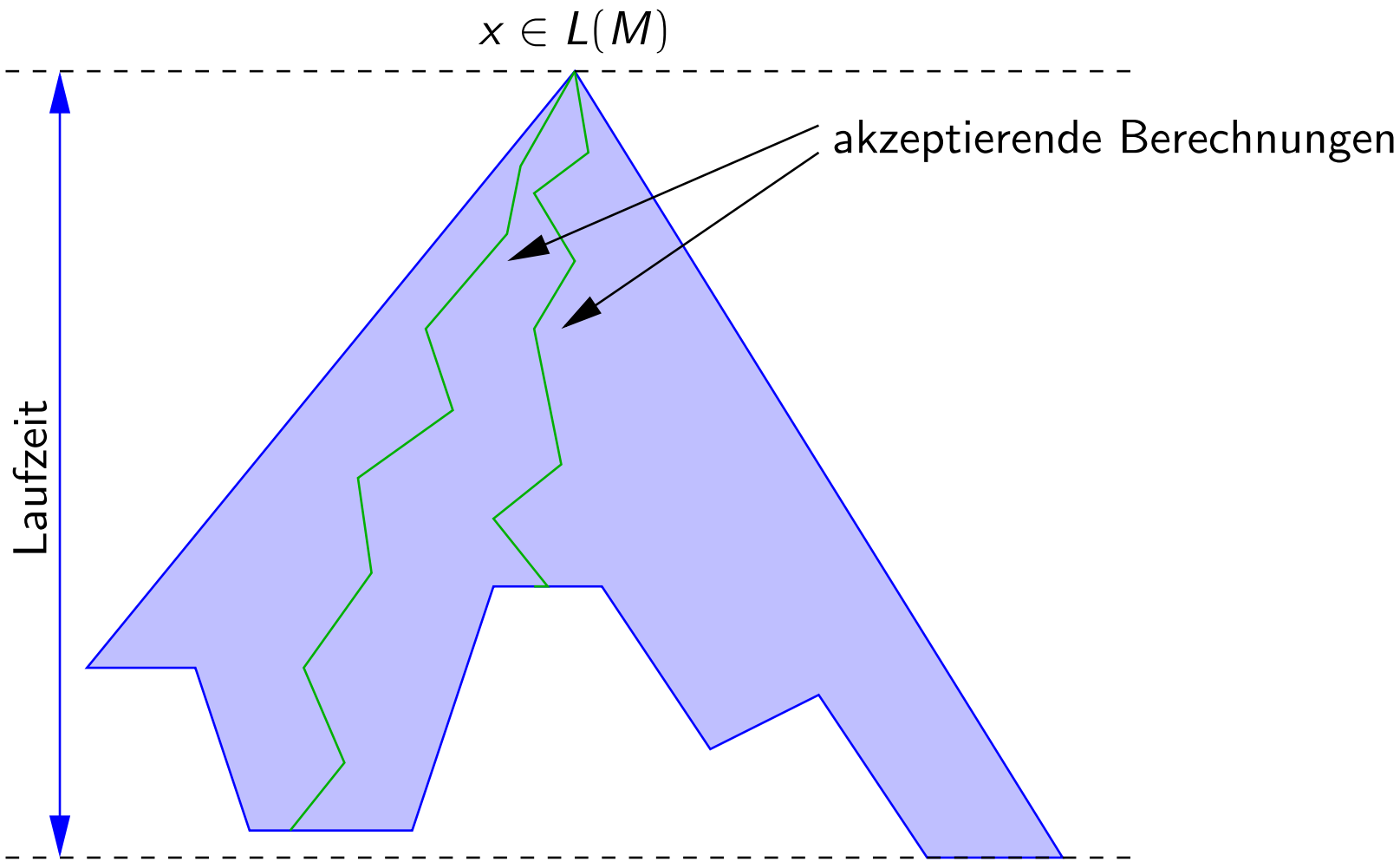
Abschätzung des Aufwands:

- Simulation eines Rechenschritts von M:
  - ▷ Scannen des Bandes, um die Buchstaben der k S/L-Köpfe zu ermitteln: $O(k \cdot t(n))$
  - ▷ Ausführen des Rechenschritts: $O(k \cdot t(n))$
  - ▷ Vergrößern der Arbeitsbänder: $O(k^2 \cdot t(n))$

  Gesamt: $O(k^2 + 2k \cdot t(n))$
- Laufzeit insgesamt: $O(t(n) \cdot (k^2 + 2k \cdot t(n))) = O(t(n)^2)$

Fazit: $L \in \mathrm{DTIME}(t(n)^2)$

Laufzeit einer nichtdet. Turing Maschine



Nichtdeterministische Zeitkomplexität

Laufzeit von M für Eingaben der Länge n:

> Maximale Länge eines Berechnungspfads bei einer beliebigen Eingabe der Länge n

Definition. Sei $t : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{N}$ eine beliebige zeitkonstruierbare Abbildung. Die Menge NTIME$(t(n))$ enthält alle Sprachen, die durch eine nichtdeterministische Einband Turing Maschine mit Laufzeit $O(t(n))$ entscheidbar sind.

Satz. Sei L eine Sprache, die durch eine nichtdeterministische k-Band Turing Maschine M akzeptiert wird. Angenommen, M verarbeitet jede Eingabe der Länge n in $t(n)$ Rechenschritten. Dann ist $L \in \text{NTIME}(t(n)^2)$.

Determinismus vs. Nichtdeterminismus

Satz. $\mathrm{NTIME}(t(n)) \subseteq \mathrm{DTIME}(2^{t(n)})$.

Beweis. Sei $M = (Z, \Gamma, \Sigma, \sqcup, \delta, z_s, z_{acc}, z_{rej})$ eine nichtdeterministische Turing Maschine mit einer Laufzeit von $t(n)$.

Der Einfachheit halber sei angenommen, dass

$$\|\delta(z, a)\| \leq 2$$

für alle $z \in Z$ und $a \in \Gamma$

Angenommen, M benötigt zur Verarbeitung von x $t(|x|)$ Rechenschritte

Determinismus vs. Nichtdeterminismus (Forts.)

Dann ist der Berechnungsbaum von M auf Eingabe x schlimmstenfalls ein vollständiger Binärbaum der Tiefe $t(|x|)$

Die Anzahl der Knoten in einem vollständigen Binärbaum der Tiefe $t(|x|)$ ist

$$\sum_{i=0}^{t(|x|)} 2^i = 2^{t(|x|)+1} - 1$$

Durch eine Breitensuche in diesem Baum kann eine akzeptierende Endkonfiguration gesucht werden.

Die Laufzeit des Algorithmus ist $O(2^{t(|x|)})$

Platzkonstruierbare Funktionen

Definition. Eine Abbildung $s : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{N}$, wobei $s(n) \geq k \log_2(n)$ für eine Konstante $k > 0$. s nennt man platzkonstruierbar, falls es eine deterministische Turing Maschine M gibt, die auf Eingabe 1^n den Wert $s(n)$ in Binärdarstellung mit einem Speicherplatzverbrauch von $O(s(n))$ berechnet

Fakt: Alle gängigen Funktionen $s(n)$ mit $s(n) \geq \log_2 n$ sind platzkonstruierbar, z.B. $n \log_2 n$, $n\sqrt{n}$, n^2 und 2^n

Anwendung: Einsatz als Speicherplatzbeschränkung

Platzkomplexität

Definition. Sei M eine deterministische Turing Maschine, die auf allen Eingaben hält. Der Speicherplatzverbrauch (Platzkomplexität) von M ist eine Funktion $f : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{N}$ mit der Eigenschaft, dass M bei allen Eingaben der Länge n höchstens $f(n)$ Bandzellen beschreibt.

Man unterscheidet:

- Platzkomplexität eines Algorithmus
- Platzkomplexität eines Entscheidungsproblems

Definition. Sei $s : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{N}$ eine beliebige platzkonstruierbare Abbildung. Die Menge DSPACE$(s(n))$ enthält alle Sprachen, die durch eine deterministische Einband Turing Maschine mit Platzkomplexitität $s(n)$ entscheidbar sind.

Mehrband Turing Maschinen

Satz. Sei M eine k-Band Turing Maschine, die auf allen Eingaben der Länge n auf jedem Band höchstens $s(n)$ viele Speicherzellen benutzt. Dann ist $L(M) \in \text{DSPACE}(s(n))$.

Beweis. Betrachte die Simulation M durch eine Einband Turing Maschine.

- Die Simulation verbraucht höchstens $k \cdot s(n) = O(s(n))$ Speicherzellen
- Die Laufzeit wird nicht berücksichtigt

Fazit: $L(M) \in \text{DSPACE}(s(n))$

Platz- vs. Zeitkomplexität

Satz. $\mathrm{DSPACE}(s(n)) \subseteq \mathrm{DTIME}(2^{s(n)})$

Beweis. Sei $M = (Z, \Gamma, \Sigma, \sqcup, \delta, z_s, z_{acc}, z_{rej})$ eine deterministische Einband Turing Maschine, die $s(n)$ platzbeschränkt ist. Sei $q = \|Z\|$ und $g = \|\Gamma\|$

Anzahl möglicher Konfigurationen bei Eingaben der Länge n:

$$q \cdot s(n) \cdot g^{O(s(n))}$$

Da M auf allen Eingaben stoppt, darf sich während der Verarbeitung von x keine Konfiguration wiederholen. Somit ist die Anzahl aller Konfigurationen eine obere Schranke für die Laufzeit von M

Somit: $L(M) \in \mathrm{DTIME}(2^{s(n)})$

Nichtdeterministische Platzkomplexität

Speicherplatzverbrauch von M für Eingaben der Länge n:

> Maximale Anzahl gelesener Speicherzellen über alle Berechnungspfade von M auf eine beliebige Eingabe der Länge n

Definition. Sei $s : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{N}$ eine beliebige platzkonstruierbare Abbildung. Die Menge NSPACE$(s(n))$ enthält alle Sprachen, die durch eine nichtdeterministische Einband Turing Maschine entscheidbar sind, die auf allen Eingaben stoppt und einen Speicherplatzverbrauch von $O(s(n))$ hat.

Satz. Sei L eine Sprache, die durch eine nichtdeterministische k-Band Turing Maschine M akzeptiert wird. Angenommen, M benutzt bei jeder Eingabe der Länge n $O(s(n))$ Speicherzellen. Dann ist $L \in$ NSPACE$(s(n))$.

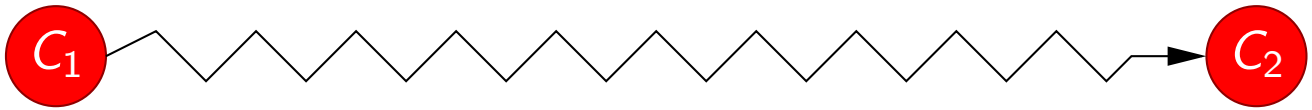
Der Satz von Savitch

Satz. (Savitch) Für jede platzkonstruierbare Funktion $f : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{R}_0^+$ mit $f(n) \geq n$ gilt:

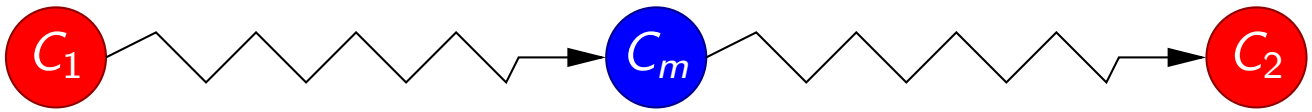
$$\text{NSPACE}(f(n)) \subseteq \text{DSPACE}(f(n)^2)$$

Beweisidee: Test von Erreichbarkeit von Konfigurationen

Frage: Ist C_1 in $\leq t$ Schritten in C_2 überführbar?



Antwort: Ja, falls es eine Konfiguration C_m gibt, so dass C_1 in $\leq \frac{t}{2}$ Schritten in C_m und C_m in $\leq \frac{t}{2}$ Schritten in C_2 überführbar ist



Der Satz von Savitch (Forts.)

Beweis. Sei $f(n)$ eine platzkonstruierbare Funktion. Sei $M = (Z, \Gamma, \Sigma, \sqcup, \delta, z_s, z_{acc}, z_{rej})$ eine nichtdeterministische Turing Maschine mit einer Platzkomplexität von $f(n)$.

Beachte:

- Da f platzkonstruierbar ist, gibt es einen Algorithmus, der alle Konfigurationen von M der Länge $f(n)$ auflistet
- Es gibt höchstens $2^{O(f(n))}$ solcher Konfigurationen
- Der Einfachkeit halber sei angenommen, dass M das Eingabeband komplett löscht, bevor sie eine Eingabe akzeptiert. Folglich gibt es eine einzige akzeptierende Konfiguration C_a

Der Satz von Savitch (Forts.)

$\textsc{CanYield}(C_1, C_2, t, n)$

Input: Konfigurationen C_1, C_2, Zahlen $t \geq 1$, $n \geq 1$

Output: `true`, falls C_1 in $\leq t$ Schritten in C_2 überführbar ist, `false` sonst.

```
1  if t = 1 then
2    if (C_1 = C_2) or (C_1 →_M C_2) then
3      return true
4    else
5      return false
6  else
7    for jede Konfiguration C_m von M der Länge f(n) do
8      if (CanYield(C_1, C_m, t/2, n) = true) and
                (CanYield(C_m, C_2, t/2, n) = true) then
9        return true
10   return false
```

Der Satz von Savitch (Forts.)

Korrektheit: Für alle $x \in \Sigma^*$ gilt:

$$M \text{ akzeptiert } x \iff \textsc{CanYield}(C_x, C_a, 2^{df(n)}, n) = \texttt{true}$$

wobei C_x die Startkonfiguration von M auf Eingabe x ist

Speicherplatzverbrauch:

- Es gibt $2^{df(n)}$ viele unterschiedliche Konfigurationen von M der Länge $f(n)$, wobei d konstant
- Die Anzahl der Rekursionen von $\textsc{CanYield}(C_x, C_a, 2^{df(n)}, n)$ ist $\log_2 2^{df(n)} = O(f(n))$
- Zur Ausführung der rekursiven Aufrufe kommt ein Stack zum Einsatz. Pro Aufruf werden die Übergabeparameter sowie die Schleifenvariable C_m abgespeichert

Gesamt: $O(f(n)) \cdot O(4 \cdot f(n)) = O(f(n)^2)$ Speicherzellen

o-Notation

Definition. Seien f eine Abbildung von $\mathbb{N}$ nach $\mathbb{R}^+$. $o(f)$ ist die Menge aller Funktionen g mit folgender Eigenschaft:

> Für alle Konstanten $c > 0$ gibt es ein $n_0 > 0$ so dass für alle $n \geq n_0$ gilt: $f(n) < c \cdot g(n)$.

Formal:

$$o(f) = \{g \mid \forall c > 0 \, \exists n_0 > 0 \, \forall n \geq n_0 : 0 \leq g(n) \leq c \cdot f(n)\}$$

Für alle $g \in o(f)$ gilt:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{g(n)}{f(n)} = 0.$$

Platz Hierarchie Satz

Satz. Für jede platzkonstruierbare Funktion f gibt es eine Sprache L, die in Platzkomplexität $O(f(n))$ entscheidbar ist, aber nicht in Platzkomplexität $o(f(n))$.

Beispiel: Platz Hierarchie Satz

Beispiel. Betrachte $f(n) = n^2$ und $g(n) = n \log_2 n$.

Es gilt:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n \log_2 n}{n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{\log_2 n}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n \ln 2} = 0$$

Also ist $g(n) \in o(f(n))$.

Mit dem Platz Hierarchie Satz folgt:

$$\mathrm{DSPACE}(n \log_2 n) \subsetneq \mathrm{DSPACE}(n^2)$$

Beweis Platz Hierarchie Satz

Beweis.

Idee: Konstruiere eine Sprache L mit folgenden Eigenschaften:

- L ist in Platzkomplexität $O(f(n))$ entscheidbar
- L ist nicht in Platzkomplexität $o(f(n))$ entscheidbar

Beweistechnik: Diagonalisierung

Beweis Platz Hierarchie Satz (Forts.)

Betrachte folgenden Algorithmus:

$\textsc{DiagF}(w)$
Input: Wort $w \in \{0,1\}^*$
Output: `true` oder `false`

1 $n := |w|$
2 **if** $w \neq \langle M \rangle 10^k$ für eine TM M und eine Zahl $k > 0$ **then**
3 **return** `false`
4 *Markiere einen Bandbereich von $f(n)$ Zellen. Wird im weiteren Verlauf dieser Bereich überschritten, dann breche ab und gib* `false` *zurück*

Beweis Platz Hierarchie Satz (Forts.)

5 *Simuliere M auf Eingabe w und zähle dabei die Anzahl Rechenschritte. Falls diese Zahl $2^{f(n)}$ übersteigt, dann gib* `false` *zurück*

6 **if** (M akzeptiert w) **then**

7 **return** `false`

8 **else**

9 **return** `true`

Beweis Platz Hierarchie Satz (Forts.)

Sei D eine Turing Maschine, die den Algorithmus $\textsc{DiagG}(w)$ berechnet. Definiere $L = L(D)$.

Bemerkung: D stoppt auf allen Eingaben, d.h., die von D akzeptierte Sprache ist entscheidbar

Platzkomplexität: Die Berechnung wird abgebrochen, wenn mehr als die markierten $f(n)$ Bandzellen benutzt werden
$\rightsquigarrow$ Speicherplatzverbrauch von D: $O(f(n))$

Annahme: Es gibt eine Turing Maschine M, die L akzeptiert und eine Platzkomplexititität von $g(n) = o(f(n))$ hat

Beweis Platz Hierarchie Satz (Forts.)

Simulation von M durch die Turing Maschine D:

- Das Arbeitsalphabet von D ist fest gewählt und verschieden vom Arbeitsalphabet von M
- Zur Simulation muss D eine Bandzelle von M auf d Bandzellen verteilen.
- Der Wert von d hängt von der Größe der Arbeitsalphabets von M ab
- Zur Simulation von M auf eine Eingabe der Länge n benötigt D also $d \cdot g(n)$ Speicherzellen

Beweis Platz Hierarchie Satz (Forts.)

Da $g(n) = o(f(n))$, gibt es für d ein n_0, so dass $d \cdot g(n) < f(n)$ für alle $n \geq n_0$

Für die Eingabe $w = \langle M \rangle 10^{n_0}$ markiert D genug Bandzellen, um M erfolgreich zu simulieren

Fallunterscheidung:

- M akzeptiert $w \rightsquigarrow D$ verwirft w. Widerspruch!
- M verwirft $w \rightsquigarrow D$ akzeptiert w. Widerspruch!

Somit: Es gibt keine Turing Maschine, die L akzeptiert und Platzkomplexität $o(f(n))$ hat

Folgerung

Korollar. Seien f_1 und f_2 Abbildungen von $\mathbb{N}$ nach $\mathbb{N}$, wobei $f_1(n) = o(f_2(n))$ und f_2 platzkonstruierbar ist. Dann gilt:

$$\mathrm{DSPACE}(f_1(n)) \subsetneq \mathrm{DSPACE}(f_2(n))$$

Korollar. Für alle $0 \leq k_1 < k_2$ gilt:

$$\mathrm{DSPACE}(n^{k_1}) \subsetneq \mathrm{DSPACE}(n^{k_2})$$

Zeit Hierarchie Satz

Satz. Für jede zeitkonstruierbare Abbildung $t : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{N}$ gibt es eine Sprache L, die in Zeitkomplexität $O(t(n))$ entscheidbar ist, aber nicht in Zeitkomplexität $o(t(n)/\log_2 t(n))$.

Korollar. Für zwei beliebige Funktion $t_1, t_2 : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{N}$, wobei $t_1(n) = o(t_2(n)/\log_2 t_2(n))$ und $t_2(n)$ zeitkonstruierbar ist, gilt:

$$\mathrm{DTIME}(t_1(n)) \subsetneq \mathrm{DTIME}(t_2(n))$$

Korollar. Für alle $1 = k_1 < k_2$ gilt:

$$\mathrm{DTIME}(n^{k_1}) \subsetneq \mathrm{DTIME}(n^{k_2})$$

Beispiel Zeit Hierarchie Satz

Beispiel. Betrachte $g(n) = n^{1.9}$ und $f(n) = n^2$

Es gilt:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{n^{1.9}}{\frac{n^2}{\log_2 n}} &= \lim_{n\to\infty} \frac{n^{1.9}\log_2 n}{n^2} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{\log_2 n}{n^{0.1}} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{0.1 \cdot n^{0.1} \ln 2} \to 0
\end{aligned}$$

Mit dem Zeit Hierarchie Satz folgt:

$$\mathrm{DTIME}(n^{1.9}) \subsetneq \mathrm{DTIME}(n^2)$$

Wichtige Komplexitätsklassen

$$
\begin{aligned}
\mathsf{L} &= \mathsf{DSPACE}(\log_2 n) \\
\mathsf{NL} &= \mathsf{NSPACE}(\log_2 n) \\
\mathsf{P} &= \bigcup_{k=1}^{\infty} \mathsf{DTIME}(n^k) \\
\mathsf{NP} &= \bigcup_{k=1}^{\infty} \mathsf{NTIME}(n^k)
\end{aligned}
$$

Wichtige Komplexitätsklassen (Forts.)

$$\begin{aligned}
\mathrm{EXP} &= \bigcup_{k=1}^{\infty} \mathrm{DTIME}(2^{n^k}) \\
\mathrm{NEXP} &= \bigcup_{k=1}^{\infty} \mathrm{NTIME}(2^{n^k}) \\
\mathrm{PSPACE} &= \bigcup_{k=1}^{\infty} \mathrm{DSPACE}(n^k) \\
\mathrm{NPSPACE} &= \bigcup_{k=1}^{\infty} \mathrm{NSPACE}(n^k)
\end{aligned}$$

Beziehungen zwischen Komplexitätsklassen

Satz. $\mathrm{NL} \subseteq \mathrm{P} \subseteq \mathrm{NP} \subseteq \mathrm{PSPACE} = \mathrm{NPSPACE} \subseteq \mathrm{EXP}$

Beweis. Anwendung der bereits bewiesenen Sätze

$\mathrm{NL} \subseteq \mathrm{P}$: ✓

$\mathrm{P} \subseteq \mathrm{NP}$: ✓

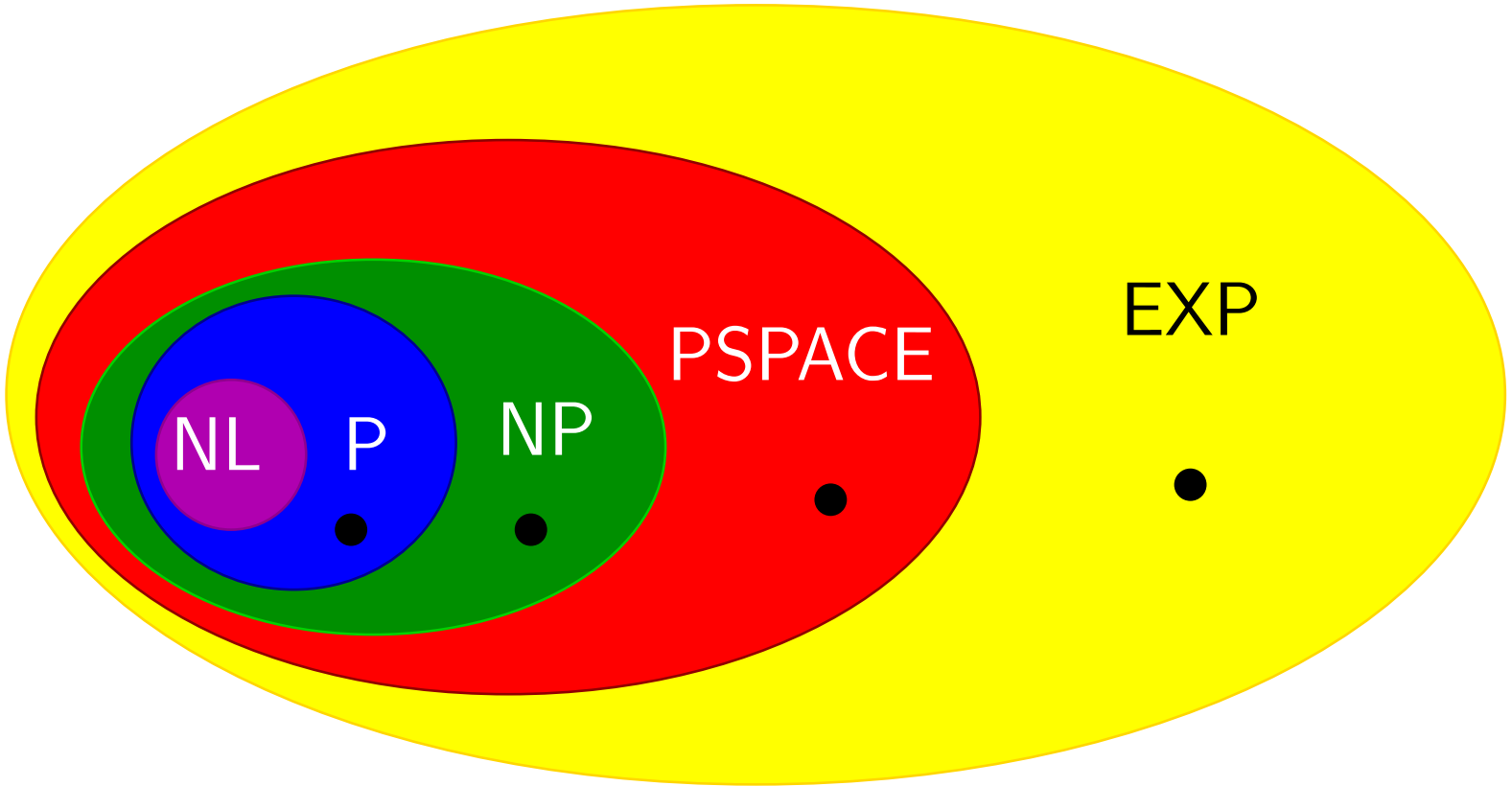
$\mathrm{PSPACE} = \mathrm{NPSPACE}$: Satz von Savitch

$\mathrm{NP} \subseteq \mathrm{PSPACE}$: ✓

$\mathrm{NPSPACE} \subseteq \mathrm{EXP}$: ✓

Eine offene Vermutung

Vermutung: $\mathrm{NL} \subsetneq \mathrm{P} \subsetneq \mathrm{NP} \subsetneq \mathrm{PSPACE} = \mathrm{NPSPACE} \subsetneq \mathrm{EXP}$



Diese Vermutung wurde bisher weder bewiesen noch widerlegt

Zusammenfassung

- Ziel der Komplexitätstheorie ist die Einteilung von entscheidbaren Sprachen anhand des zu ihrer Berechnung notwendigen Ressourcenverbrauchs
- Die wichtigsten Ressourcen sind Rechenzeit und Speicherplatz
- Es gibt keine obere Schranke für den maximalen Ressourcenverbrauch
- Eine bisher nicht bewiesene Vermutung ist:

$$\mathsf{NL} \subsetneq \mathsf{P} \subsetneq \mathsf{NP} \subsetneq \mathsf{PSPACE} \subsetneq \mathsf{EXP}$$