Prof. Dr. Christoph Karg
Studiengang Informatik
Hochschule Aalen

29.1.2013

Klausur zur Vorlesung
Berechenbarkeit und Komplexitätstheorie
Wintersemester 2012/2013

Name: ______________________________

Matr. Nr.: ______________________________

Unterschrift: ______________________________

Klausurergebnis			
Aufgabe 1 (20 Punkte)		Aufgabe 2 (10 Punkte)	
Aufgabe 3 (15 Punkte)		Aufgabe 4 (10 Punkte)	
Aufgabe 5 (10 Punkte)		Aufgabe 6 (10 Punkte)	
Aufgabe 7 (15 Punkte)		Aufgabe 8 (10 Punkte)	
Gesamt (100 Punkte)		**Note**	

Bearbeitungshinweise:

- Die Bearbeitungsdauer der Klausur beträgt 120 Minuten.
- Überprüfen Sie bitte sofort nach Erhalt die Vollständigkeit der Unterlagen (17 Seiten).
- Bitte lassen Sie die Klausur zusammengeheftet.
- Schreiben Sie bitte auf jedes Blatt Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer.
- Falls notwendig, dann benutzen Sie die Rückseite des jeweiligen Aufgabenblatts für Notizen und Entwürfe.
- Bei der Konstruktion von Automaten genügt die Angabe des entsprechenden Zustandsdiagramms.

Viel Erfolg!

Name: ______________________________ Matr. Nr.: _________________________

Aufgabe 1. (20 Punkte)

Gegeben ist die Turing Maschine

$$M = (\{z_0, z_1, z_2, z_3, z_{acc}, z_{rej}\}, \{0, 1\}, \{0, 1, \sqcup\}, \sqcup, \delta, z_0, z_{acc}, z_{rej})$$

mit folgender Überführungsfunktion:

$$\begin{array}{rcl@{\qquad}rcl}
\delta(z_0, 0) & = & (z_1, \sqcup, R) & \delta(z_2, 0) & = & (z_{rej}, \sqcup, R) \\
\delta(z_0, 1) & = & (z_1, 1, R) & \delta(z_2, \sqcup) & = & (z_3, \sqcup, L) \\
\delta(z_0, \sqcup) & = & (z_{rej}, \sqcup, R) & \delta(z_3, 0) & = & (z_{rej}, 0, L) \\
\delta(z_1, 0) & = & (z_1, \sqcup, R) & \delta(z_3, 1) & = & (z_{acc}, 1, R) \\
\delta(z_1, 1) & = & (z_2, \sqcup, R) & \delta(z_3, \sqcup) & = & (z_3, \sqcup, L)
\end{array}$$

a) Stellen Sie die Turing Maschine mit einem Zustandsdiagramm grafisch dar:

Name: ______________________________ Matr. Nr.: _________________________

b) Welche Konfigurationen durchläuft die Turing Maschine für die Eingabe $x = 10001$?

c) Welche Sprache akzeptiert die Turing Maschine?

d) Gibt es Eingaben, auf denen die Turing Maschine nicht stoppt? Begründen Sie Ihre Antwort.

Name: ______________________________ Matr. Nr.: _________________________

Aufgabe 2. (10 Punkte)

Überprüfen Sie mit dem in der Vorlesung durchgenommenen Algorithmus, ob die Formel

$$F = (x_1 \vee \neg x_3) \wedge (\neg x_1 \vee x_2) \wedge (\neg x_3 \vee \neg x_2) \wedge (\neg x_1 \vee x_3) \wedge (\neg x_2 \vee x_1)$$

erfüllbar ist.

first	x_1	x_2	x_3	$x_1 \vee \neg x_3$	$\neg x_1 \vee x_2$	$\neg x_3 \vee \neg x_2$	$\neg x_1 \vee x_3$	$\neg x_2 \vee x_1$

Ergebnis: ____

Name: ______________________________ Matr. Nr.: _________________________

Aufgabe 3. (15 Punkte)

Gegeben ist das Alphabet $\Sigma = \{0, 1\}$. Die Funktion *reverse* : $\Sigma^* \mapsto \Sigma^*$ ist definiert als

$$reverse(a_1 a_2 \ldots a_n) = a_n \ldots a_2 a_1.$$

Für ein Wort $x \in \Sigma^*$ berechnet $reverse(x)$ ein Wort, das die Buchstaben in x in umgekehrter Reihenfolge enthält. Beispielsweise ist $reverse(100111) = 111001$.

Konstruieren Sie eine Turing Maschine mit folgenden Eigenschaften:

- Auf Eingabe $x = \varepsilon$ verwirft die Turing Maschine.
- Auf Eingabe $x \in \Sigma^*$, $|x| > 0$, berechnet die Turing Maschine $reverse(x)$ und akzeptiert.
- Am Ende der Berechnung befindet sich der L/S-Kopf der Turing Maschine am Anfang des beschriebenen Teils des Arbeitsbands.
- Die Turing Maschine hat höchstens zehn Zustände.

Hinweis: Falls der Platz nicht ausreicht, dann bitte auf der nächsten Seite weiterschreiben.

Name: ______________________________ Matr. Nr.: _________________________

Name: ______________________________ Matr. Nr.: _________________________

Aufgabe 4. (10 Punkte)

Gegeben ist die Formel

$$F = \neg(x_1 \lor x_2 \land \neg x_3) \lor (\neg x_1 \land (x_2 \lor \neg x_4))$$

Überprüfen Sie mit dem in der Vorlesung durchgenommenen Verfahren, ob $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 0$, $x_4 = 0$ eine erfüllende Belegung für F ist.

Name: ______________________________ Matr. Nr.: _________________________

Aufgabe 5. (10 Punkte)

Sei Σ ein beliebiges Alphabet. Die Einbettung einer Sprache $A \subseteq \Sigma^*$ ist definiert als

$$Embedding(A) = \{uvw \mid v \in A, u, w \in \Sigma^*\}.$$

Beispiel: Sei $\Sigma = \{0, 1\}$. Für die Sprache $A = \{10, 110, 1011\}$ enthält $Embedding(A)$ alle Binärwörter, die das Pattern 10, 110 oder 1011 enthalten.

Angenommen, A ist entscheidbar. Ist dann auch $Embedding(A)$ entscheidbar? Begründen Sie Ihre Antwort.

Hinweis: Falls der Platz nicht ausreicht, dann bitte auf der nächsten Seite weiterschreiben.

Name: ______________________________ Matr. Nr.: ________________________

Name: ______________________________ Matr. Nr.: ________________________

Aufgabe 6. (10 Punkte)

Gegeben ist die 3KNF-Formel

$$F = (x_1 \vee \neg x_2 \vee x_3) \wedge (x_1 \vee \neg x_4 \vee x_3) \wedge (\neg x_2 \vee \neg x_3 \vee \neg x_4) \wedge (\neg x_1 \vee \neg x_3 \vee x_4).$$

a) Reduzieren Sie mit dem in der Vorlesung durchgenommenen Verfahren F auf eine Problemstellung für Vertex Cover.

Name: ______________________________ Matr. Nr.: _________________________

b) Geben Sie für F eine erfüllende Belegung an und konstruieren Sie daraus die entsprechende Lösung für die Vertex Cover Instanz von Teilaufgabe a.

Name: ______________________________ Matr. Nr.: _________________________

Aufgabe 7. (15 Punkte)

Das *Exact Cover* Entscheidungsproblem wird durch folgende Fragestellung definiert:

Gegeben: Eine endliche Menge S, eine Menge $M \subseteq \mathcal{P}(S)$, wobei $\mathcal{P}(S)$ für die Potenzmenge von S steht.

Gefragt: Existiert in M eine exakte Überdeckung von S? Oder formal: Gibt es Mengen $X_1, \ldots, X_k$ mit folgenden Eigenschaften:

(1) Es gilt: $k \leq ||S||$.

(2) Für alle $i = 1, \ldots, k$ gilt: $X_i \in M$.

(3) Es gilt: $X_1 \cup \ldots \cup X_k = S$.

(4) Für alle $1 \leq i, j \leq k$ gilt: Falls $i \neq j$, dann ist $X_i \cap X_j = \emptyset$.

Zur Illustration ein Beispiel. Gegeben ist die Menge $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ und die Menge

$$M = \{\{1, 3, 4\}, \{2, 4, 6\}, \{5, 6\}, \{1, 2, 5, 6\}, \{1, 3, 5\}, \{2\}\}.$$

Die Problemstellung (S, M) besitzt folgende exakte Überdeckung:

$$X_1 = \{1, 3, 4\}, X_2 = \{5, 6\}, X_3 = \{2\}.$$

a) Überprüfen Sie, ob die folgende Problemstellung eine exakte Überdeckung besitzt. Falls ja, wie lautet diese?

$$\begin{aligned} S &= \{a, b, c, d, e, f, g\} \\ M &= \{\{a, c\}, \{c, d, g\}, \{a, b, e, g\}, \{b, e, f\}, \{b, e, g\}, \{a, e, g\}, \{b, e, f\}, \{d, f\}\} \end{aligned}$$

b) Weisen Sie nach, dass Exact Cover in NP ist. Gehen Sie bei Ihrer Laufzeitanalyse davon aus, dass die Mengen in verketteten Listen gespeichert werden.

Hinweis: Falls der Platz nicht ausreicht, dann bitte auf der nächsten Seite weiterschreiben.

Name: ______________________________ Matr. Nr.: _________________________

Name: ______________________________ Matr. Nr.: ________________________

Aufgabe 8. (10 Punkte)

Gegeben ist die folgende aussagenlogische Formel in 3-KNF:

$$F = (x_1 \vee x_2 \vee x_4) \wedge (\neg x_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge (\neg x_2 \vee x_3 \vee \neg x_4)$$

a) Reduzieren Sie mit dem in der Vorlesung durchgenommenen Verfahren F auf eine Problemstellung für Subset Sum.

b) Geben Sie für F eine erfüllende Belegung an und konstruieren Sie daraus die entsprechende Lösung für die Subset Sum Instanz von Teilaufgabe a.