

Klausur zur Vorlesung
Berechenbarkeit und Komplexitätstheorie
Sommersemester 2011

Name: _____

Matr. Nr.: _____

Unterschrift: _____

Klausurergebnis			
Aufgabe 1 (10 Punkte)		Aufgabe 2 (20 Punkte)	
Aufgabe 3 (15 Punkte)		Aufgabe 4 (15 Punkte)	
Aufgabe 5 (10 Punkte)		Aufgabe 6 (20 Punkte)	
Aufgabe 7 (10 Punkte)			
Gesamt (100 Punkte)		Note	

Bearbeitungshinweise:

- Die Bearbeitungsdauer der Klausur beträgt 120 Minuten.
- Überprüfen Sie bitte sofort nach Erhalt die Vollständigkeit der Unterlagen (19 Seiten).
- Bitte lassen Sie die Klausur zusammengeheftet.
- Schreiben Sie bitte auf jedes Blatt Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer.
- Falls notwendig, dann benutzen Sie die Rückseite des jeweiligen Aufgabenblatts für Notizen und Entwürfe.
- Bei der Konstruktion von Automaten genügt die Angabe des entsprechenden Zustandsdiagramms.

Viel Erfolg!

Name: _____

Matr. Nr.: _____

Aufgabe 1. (10 Punkte)

Überprüfen Sie mit dem in der Vorlesung durchgenommenen Algorithmus, ob die Formel

$$F = (\neg x_1 \vee x_2) \wedge (x_3 \vee \neg x_2) \wedge (\neg x_1 \vee \neg x_3) \wedge (x_1 \vee x_3) \wedge (\neg x_1 \vee \neg x_2)$$

erfüllbar ist.

first	x_1	x_2	x_3	$\neg x_1 \vee x_2$	$x_3 \vee \neg x_2$	$\neg x_1 \vee \neg x_3$	$x_1 \vee x_3$	$\neg x_1 \vee \neg x_2$

Ergebnis: _____

Name: _____

Matr. Nr.: _____

Aufgabe 2. (20 Punkte)

Gegeben ist die Turing Maschine

$$M = (\{z_0, z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, z_{acc}, z_{rej}\}, \{0, 1\}, \{0, 1, \sqcup\}, \sqcup, \delta, z_0, z_{acc}, z_{rej}),$$

wobei

$$\begin{array}{lll}
\delta(z_0, 0) & = & (z_3, \cup, R,) \\
\delta(z_0, 1) & = & (z_1, 1, R) \\
\delta(z_1, 0) & = & (z_2, 0, R) \\
\delta(z_2, 0) & = & (z_2, 0, R) \\
\delta(z_2, 1) & = & (z_2, 1, R) \\
\delta(z_2, \cup) & = & (z_{acc}, \cup, R)
\end{array}
\qquad
\begin{array}{lll}
\delta(z_3, 0) & = & (z_4, 0, L) \\
\delta(z_3, 1) & = & (z_5, \cup, R) \\
\delta(z_4, 0) & = & (z_{acc}, 0, R) \\
\delta(z_4, 1) & = & (z_{rej}, 1, R) \\
\delta(z_4, \cup) & = & (z_4, \cup, L) \\
\delta(z_5, 0) & = & (z_5, 0, R) \\
\delta(z_5, \cup) & = & (z_{rej}, \cup, R)
\end{array}$$

- a) Zeichnen Sie den Zustandsgraphen der Turing Maschine:

Name: _____

Matr. Nr.: _____

- b) Welche Konfigurationen durchläuft M bei der Verarbeitung der Eingabe 010100?

Name: _____

Matr. Nr.: _____

- c) Stoppt M auf allen Eingaben? Begründen Sie Ihre Antwort.

Name: _____

Matr. Nr.: _____

- d) Welche Sprache akzeptiert M ?

Name: _____

Matr. Nr.: _____

Aufgabe 3. (15 Punkte)

Die Funktion $f : \{a, b\}^* \mapsto \{a, b\}$ ersetzt in einer Eingabe x jedes Vorkommen des Teilworts ba durch das Teilwort aab . Zum Beispiel:

$$\begin{aligned}f(abab) &= aaabb \\f(ababaa) &= aaabaaba \\f(aaaab) &= aaaab \\f(bbbbbbb) &= bbbbbbb\end{aligned}$$

Für das leere Wort ε ist f nicht definiert.

Ziel ist es, eine deterministische Einband Turing Maschine M zu konstruieren, die folgende Eigenschaften besitzt:

- Die Eingabe ε wird verworfen.
 - Alle anderen Eingaben werden akzeptiert.
 - M berechnet die Funktion f .
 - Nach der Berechnung von f befindet sich der Lese-/Schreib-Kopf von M am Anfang des Ergebnisses.
- a) Beschreiben Sie umgangssprachlich den Algorithmus, den Ihre Turing Maschine abarbeitet.

Hinweis: Falls der Platz nicht ausreicht, dann bitte auf der nächsten Seite weiter-schreiben.

Name: _____

Matr. Nr.: _____

Name: _____

Matr. Nr.: _____

- b) Konstruieren Sie eine deterministische Einband Turing Maschine, die die Transformation f berechnet und auf allen Eingaben stoppt.

Name: _____

Matr. Nr.: _____

Aufgabe 4. (15 Punkte)Gegeben ist die folgende kontextfreie Grammatik G in Chomsky Normalform.

$$\begin{aligned}
 S &\rightarrow XY \mid YX \\
 X &\rightarrow BE \\
 Y &\rightarrow FB \\
 E &\rightarrow a \mid XA \\
 F &\rightarrow a \mid AY \\
 A &\rightarrow a \\
 B &\rightarrow b
 \end{aligned}$$

- a) Weisen Sie unter Einsatz des CYK-Algorithmus nach, dass das Wort $aabbba$ in der von der Grammatik G erzeugten Sprache liegt.

i	1	2	3	4	5	6
	a	a	b	b	b	a
$j = 1$						
$j = 2$						
$j = 3$						
$j = 4$						
$j = 5$						
$j = 6$						

Name: _____

Matr. Nr.: _____

- b) Zeichnen Sie auf Basis der Berechnung von Teilaufgabe a einen Ableitungsbaum für das Wort *aabbba*.

Name: _____

Matr. Nr.: _____

Aufgabe 5. (10 Punkte)

Gegeben ist folgende Klasse von Sprachen über dem Alphabet $\Sigma = \{0, 1\}$:

$$\mathcal{C} = \{L \subseteq \Sigma^* \mid L \text{ ist eine endliche Sprache}\}.$$

Ist \mathcal{C} eine entscheidbare Klasse von Sprachen? Begründen Sie Ihre Antwort.

Hinweis: Falls der Platz nicht ausreicht, dann bitte auf der nächsten Seite weiterschreiben.

Name: _____

Matr. Nr.: _____

Name: _____

Matr. Nr.: _____

Aufgabe 6. (20 Punkte)

Betrachten Sie die Sprache

$$B = \left\{ F \mid \begin{array}{l} F \text{ ist eine aussagenlogische Formel in 3KNF mit} \\ \text{mindestens zwei erfüllenden Belegungen} \end{array} \right\}$$

Beispielsweise ist die Formel

$$(x_1 \vee x_1 \vee x_1) \wedge (x_2 \vee x_2 \vee x_2)$$

nicht in B , da es nur eine erfüllende Belegung ($x_1 = 1, x_2 = 1$) gibt. Die Formel

$$(x_1 \vee x_1 \vee x_1) \wedge (x_2 \vee x_2 \vee x_2) \wedge (x_3 \vee x_3 \vee \neg x_3)$$

ist dagegen in B , da es zwei erfüllende Belegungen ($x_1 = 1, x_2 = 1, x_3 = 0$ und $x_1 = 1, x_2 = 1, x_3 = 1$) gibt.

- a) Beweisen Sie, dass $B \in \text{NP}$ ist.

Hinweis: Falls der Platz nicht ausreicht, dann bitte auf der nächsten Seite weiter-schreiben.

Name: _____

Matr. Nr.: _____

Name: _____

Matr. Nr.: _____

- b) Beweisen Sie, dass B NP-vollständig ist, indem Sie eine many-one Reduktion von 3-SAT auf B konstruieren.

Hinweis: Falls der Platz nicht ausreicht, dann bitte auf der nächsten Seite weiter-schreiben.

Name: _____

Matr. Nr.: _____

Name: _____

Matr. Nr.: _____

Aufgabe 7. (10 Punkte)

Gegeben ist die 3KNF-Formel

$$(\neg x_1 \vee x_3 \vee x_4) \wedge (\neg x_2 \vee x_3 \vee \neg x_1) \wedge (x_1 \vee \neg x_3 \vee \neg x_4) \wedge (x_1 \vee \neg x_2 \vee x_4).$$

Reduzieren Sie F auf eine Problemstellung für Subset Sum. Geben Sie eine erfüllende Belegung für F und die entsprechende Lösung für Subset Sum an.

Hinweis: Falls der Platz nicht ausreicht, dann bitte auf der nächsten Seite weiterschreiben.

Name: _____

Matr. Nr.: _____