Prof. Dr. Christoph Karg
Studiengang Informatik
Hochschule Aalen

9.2.2011

Klausur zur Vorlesung
Berechenbarkeit und Komplexitätstheorie
Wintersemester 2010/2011

Name: ____________________

Matr. Nr.: ____________________

Unterschrift: ____________________

Klausurergebnis			
Aufgabe 1 (10 Punkte)		Aufgabe 2 (20 Punkte)	
Aufgabe 3 (15 Punkte)		Aufgabe 4 (10 Punkte)	
Aufgabe 5 (15 Punkte)		Aufgabe 6 (15 Punkte)	
Aufgabe 7 (15 Punkte)			
Gesamt (100 Punkte)		**Note**	

Bearbeitungshinweise:

- Die Bearbeitungsdauer der Klausur beträgt 120 Minuten.
- Überprüfen Sie bitte sofort nach Erhalt die Vollständigkeit der Unterlagen (15 Seiten).
- Bitte lassen Sie die Klausur zusammengeheftet.
- Schreiben Sie bitte auf jedes Blatt Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer.
- Falls notwendig, dann benutzen Sie die Rückseite des jeweiligen Aufgabenblatts für Notizen und Entwürfe.
- Bei der Konstruktion von Automaten genügt die Angabe des entsprechenden Zustandsdiagramms.

Viel Erfolg!

Name: ______________________________ Matr. Nr.: _________________________

Aufgabe 1. (10 Punkte)

Überprüfen Sie mit dem in der Vorlesung durchgenommenen Algorithmus, ob die Formel

$$F = (x_1 \vee x_2) \wedge (\neg x_1 \vee \neg x_2) \wedge (\neg x_1 \vee \neg x_3) \wedge (x_2 \vee x_3) \wedge (x_1 \vee x_3)$$

erfüllbar ist.

first	x_1	x_2	x_3	$x_1 \vee x_2$	$\neg x_1 \vee \neg x_2$	$\neg x_1 \vee \neg x_3$	$x_2 \vee x_3$	$x_1 \vee x_3$

Ergebnis: ____

Name: ______________________________ Matr. Nr.: _________________________

Aufgabe 2. (20 Punkte)

Gegeben ist die Sprache

$$L = \{x \in \{a, b\}^* \mid x \text{ enthält mehr } a\text{'s als } b\text{'s}\}$$

Beispielsweise sind die Wörter *bbabaaa* und *abababa* in L, die Wörter *aaabbb* und *bbba* dagegen nicht.

Ziel ist es, eine deterministische Einband Turing Maschine zu konstruieren, die L akzeptiert.

a) Beschreiben Sie umgangsprachlich den Algorithmus, den Ihre Turing Maschine abarbeitet.

   Hinweis: Falls der Platz nicht ausreicht, dann bitte auf der nächsten Seite weiterschreiben.

b) Konstruieren Sie eine deterministische Einband Turing Maschine, die L akzeptiert und auf allen Eingaben stoppt.

Name: ______________________________ Matr. Nr.: _________________________

Aufgabe 3. (15 Punkte)

Beweisen Sie, dass die Funktion $f(n) = 8n^4 + 3n^2 + 5$ zeitkonstruierbar ist.

Hinweis: Falls der Platz nicht ausreicht, dann bitte auf der nächsten Seite weiterschreiben.

Name: ______________________________ Matr. Nr.: _________________________

Name: ______________________________ Matr. Nr.: _________________________

Aufgabe 4. (10 Punkte)
Die Konkatenation zweier Sprachen A und B über dem Alphabet Σ ist definiert als

$$A \circ B = \{xy \mid x \in A \text{ und } y \in B\}.$$

Angenommen, A und B sind entscheidbar. Ist dann auch $A \circ B$ entscheidbar? Begründen Sie Ihre Antwort.

Hinweis: Falls der Platz nicht ausreicht, dann bitte auf der nächsten Seite weiterschreiben.

Name: ______________________________ Matr. Nr.: _________________________

Name: ____________________ Matr. Nr.: ____________________

Aufgabe 5. (15 Punkte)

Gegeben ist die 3KNF-Formel

$$(\neg x_1 \vee x_2 \vee \neg x_3) \wedge (x_2 \vee \neg x_3 \vee x_1) \wedge (x_2 \vee \neg x_3 \vee \neg x_4) \wedge (\neg x_2 \vee \neg x_3 \vee \neg x_4).$$

Reduzieren Sie F auf eine Problemstellung für Vertex Cover. Geben Sie eine erfüllende Belegung für F und die entsprechende Lösung für Vertex Cover an.

Name: ______________________________ Matr. Nr.: _________________________

Aufgabe 6. (15 Punkte)

Das *Simultane Inkongruenzen* Problem (kurz: SI) steht für die folgende Aufgabenstellung.

Gegeben: Eine Folge von Zahlenpaaren $(a_1, b_1), \ldots, (a_n, b_n)$, wobei $a_i \in \mathbb{N}$, $b_i \in \mathbb{N}$, und $a_i \leq b_i$ für alle $i = 1, \ldots, n$ gilt.

Gefragt: Existiert eine Zahl $x \in \mathbb{N}$ so dass $x \not\equiv a_i \pmod{b_i}$ für alle $i = 1, \ldots, n$ gilt?

Beachte: $a \equiv b \pmod{n}$ genau dann, wenn $a \bmod n = b \bmod n$.

Zur Illustration ein *Beispiel*: die Folge $(1, 2), (1, 3), (2, 5), (1, 7)$ ist in SI, denn für $x = 26$ gilt:

- $i = 1$:
$$\begin{array}{cccll} & x & \equiv & 26 & \pmod{2} \\ & & \equiv & 0 & \pmod{2} \\ & & \not\equiv & 1 & \pmod{2} \\ \hline \Rightarrow & x & \not\equiv & a_1 & \pmod{b_1} \end{array}$$

- $i = 2$:
$$\begin{array}{cccll} & x & \equiv & 26 & \pmod{3} \\ & & \equiv & 2 & \pmod{3} \\ & & \not\equiv & 1 & \pmod{3} \\ \hline \Rightarrow & x & \not\equiv & a_2 & \pmod{b_2} \end{array}$$

- $i = 3$:
$$\begin{array}{cccll} & x & \equiv & 26 & \pmod{5} \\ & & \equiv & 1 & \pmod{5} \\ & & \not\equiv & 2 & \pmod{5} \\ \hline \Rightarrow & x & \not\equiv & a_3 & \pmod{b_3} \end{array}$$

- $i = 4$:
$$\begin{array}{cccll} & x & \equiv & 26 & \pmod{7} \\ & & \equiv & 5 & \pmod{7} \\ & & \not\equiv & 1 & \pmod{7} \\ \hline \Rightarrow & x & \not\equiv & a_4 & \pmod{b_4} \end{array}$$

Name: ______________________________ Matr. Nr.: _________________________

Beweisen Sie, dass SI $\in$ NP ist.

Hinweis: Falls der Platz nicht ausreicht, dann bitte auf der nächsten Seite weiterschreiben.

Name: ______________________________ Matr. Nr.: _________________________

Name: ______________________________ Matr. Nr.: _________________________

Aufgabe 7. (15 Punkte)

Gegeben ist die folgende aussagenlogische Formel in KNF:

$$F = (x_1 \vee \neg x_2 \vee x_3 \vee x_4 \vee x_4) \wedge (\neg x_1 \vee \neg x_2) \wedge \neg x_3$$

a) Reduzieren Sie mit dem in der Vorlesung durchgenommenen Verfahren F auf eine Formel in 3-KNF.

Name: ______________________________ Matr. Nr.: _________________________

b) Geben Sie für F eine erfüllende Belegung an und konstruieren Sie daraus die entsprechende erfüllende Belegung für die Formel von Teilaufgabe a.