Algorithmen und Datenstrukturen 2

Lerneinheit 7: Kürzeste Pfade in Graphen

Prof. Dr. Christoph Karg

Studiengang Informatik
Hochschule Aalen

Sommersemester 2016

5.6.2015

Einleitung

Diese Lerneinheit beschäftigt sich mit der Berechnung von kürzesten Wegen in gewichteten Graphen.

Sie gliedert sich in folgende Abschnitte:

- Single Source Shortest Paths
  - Algorithmus von Bellman und Ford
  - Algorithmus von Dijkstra
- All-Pairs Shortest Paths
  - Algorithmus von Floyd & Warshall

Kürzeste Pfade in gewichteten Graphen

Gegeben ist ein Graph $G = (V, E)$ mit einer Gewichtsfunktion $w : E \mapsto \mathbb{R}$.

- Das Gewicht des Pfades $p = \langle v_0, v_1, \ldots, v_k \rangle$ ist definiert als

$$w(p) = \sum_{i=1}^{k} w(v_{i-1}, v_i)$$

- $u \overset{p}{\rightsquigarrow} v$ bezeichnet, dass p ein Pfad von u nach v ist
- Das Gewicht eines kürzesten Pfads von u nach v ist

$$\delta(u, v) = \begin{cases} \min\{w(p) \mid u \overset{p}{\rightsquigarrow} v\} & \text{falls ein Pfad von } u \text{ nach } v \text{ existiert} \\ \infty & \text{sonst} \end{cases}$$

Optimale Teilstruktur von kürzesten Pfaden

Lemma 1. Betrachte einen gerichteten Graphen $G = (V, E)$ mit Gewichtsfunktion $w : E \mapsto \mathbb{R}$. Sei $p = \langle v_1, v_2, \ldots, v_k \rangle$ ein Pfad von v_1 nach v_k. Sei $p_{ij} = \langle v_i, \ldots, v_j \rangle$ ein Teilpfad von p, wobei $1 \leq i \leq j \leq k$. Dann ist p_{ij} ein kürzester Pfad von v_i nach v_j.

Beweis. Der Pfad p lässt sich zerlegen in die Pfade

$$v_1 \overset{p_{1i}}{\rightsquigarrow} v_i \overset{p_{ij}}{\rightsquigarrow} v_j \overset{p_{jk}}{\rightsquigarrow} v_k$$

Es gilt: $w(p) = w(p_{1i}) + w(p_{ij}) + w(p_{jk})$. Angenommen es gibt einen Pfad p'_{ij} mit $w(p'_{ij}) < w(p_{ij})$. Dann hat der Pfad

$$v_1 \overset{p_{1i}}{\rightsquigarrow} v_i \overset{p'_{ij}}{\rightsquigarrow} v_j \overset{p_{jk}}{\rightsquigarrow} v_k$$

ein geringeres Gewicht als der Pfad p. Widerspruch!

Algorithmische Problemstellungen

Betrachte einen Graphen $G = (V, E)$

- Single Source Shortest Paths Problem: Finde für einen Startknoten s die kürzesten Pfade zu jedem Knoten $v \in V$
- Single Destination Shortest Paths Problem: Finde für jeden Knoten $v \in V$ einen kürzesten Pfad zu einem Zielknoten t
- Single Pair Shortest Path Problem: Finde einen kürzesten Pfad von einem Startknoten s zu einem Zielknoten t
- All Pairs Shortest Paths: Finde für jedes Knotenpaar u und v einen kürzesten Pfad von u nach v

Kanten mit negativem Gewicht

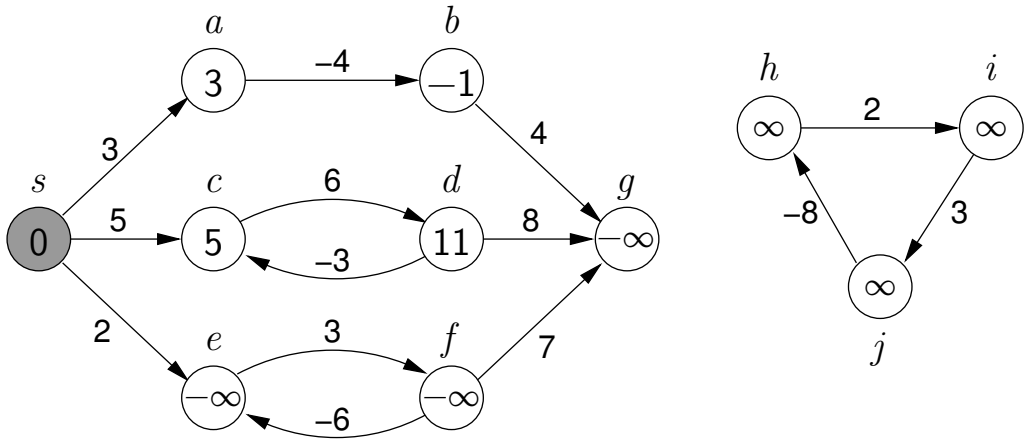
Gegeben: Graph $G = (V, E)$, der Kanten mit negativen Gewichten enthält

Frage: Wie wirken sich diese "negativen" Kanten auf die Berechnung der kürzesten Pfade aus?

Antwort:

- Falls in G vom Startknoten s aus keine negativen Zyklen erreichbar sind, dann ist für jeden Knoten v der kürzeste Pfad $\delta(s, v)$ wohldefiniert
- Andernfalls kann ein Pfad von s zu einem Knoten v, der über einen negativen Zyklus führt, kein kürzester Pfad sein. In einem solchen Fall ist $\delta(s, v) = -\infty$

Kanten mit negativem Gewicht (Beispiel)



Arbeitsweise der Single Source Algorithmen

Annahme: Die Suche beginnt beim Knoten s

Berechnete Informationen:

- $d[v] \rightsquigarrow$ Länge des bisher gefundenen kürzesten Pfads von s nach v. Falls $d[v] = \infty$, dann wurde (noch) kein Pfad gefunden
- $\pi[v] \rightsquigarrow$ Vorgänger auf dem kürzesten Pfad von s nach v. Falls $\pi[v] = \texttt{NIL}$, dann wurde (noch) kein Pfad gefunden

Bemerkungen

- Während des Ablauf des Algorithmus enthalten obige Werte Informationen über die aktuell kürzesten Pfade
- Zur Berechnung einer Verbesserung kommt die Relaxation Technik zum Einsatz

Algorithmus InitializeSingleSource

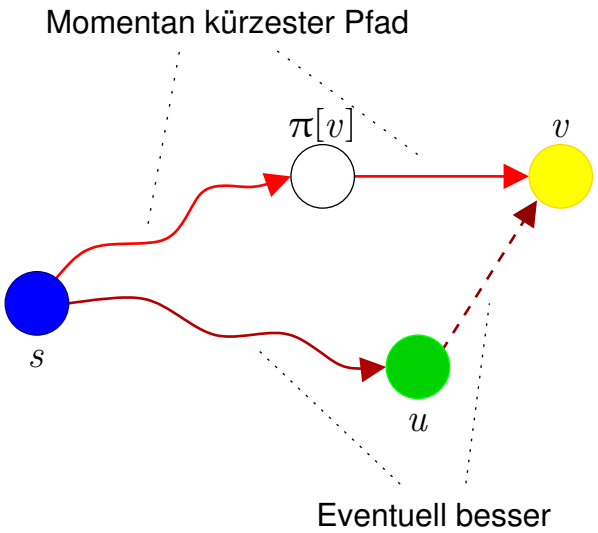
InitializeSingleSource(G, s)

1 **for** *jeden Knoten* $v \in V$ **do**
2 $\quad d[v] := \infty$
3 $\quad \pi[v] := \texttt{NIL}$
4 $d[s] := 0$

Bemerkungen

- Diese Funktion initialisiert die d- und π-Tabellen
- Der Werte $d[s] = 0$ und $\pi[s] = \texttt{NIL}$ sind korrekt und werden nicht mehr verändert

Relaxation



Verbesserung, falls $d[u] + w(u, v) < d[v]$

Algorithmus RELAX

RELAX(u, v, w)

```
1 if d[v] > d[u] + w(u, v) then
2    d[v] := d[u] + w(u, v)
3    π[v] := u
4    return true
5 else
6    return false
```

Bemerkungen

- Das Relaxing einer Kante (u, v) besteht darin, zu überprüfen, ob man den kürzesten Pfad von s nach v dadurch verbessern kann, indem man über die Kante (u, v) läuft
- Anhand des Rückgabewertes kann man ermitteln. ob eine Relaxation durchgeführt wurde

Eigenschaft von kürzesten Pfaden

Eigenschaft 1. (Dreiecksungleichung)
Sei $G = (V, E)$ ein gerichteter Graph mit Gewichtsfunktion $w : E \mapsto \mathbb{R}$. Sei $s \in V$ ein beliebiger Knoten. Für alle Kanten $(u, v) \in E$ gilt $\delta(s, v) \leq \delta(s, u) + w(u, v)$.

Beweis. Angenommen es gibt einen kürzesten Pfad von s nach v. Dann ist das Gewicht von p kleiner-gleich dem Gewicht von jedem Pfad von s nach v, insbesondere von einem Pfad von s nach u, der dann über die Kante (u, v) nach v führt.

Wenn es keinen Pfad von s nach v gibt, dann ist $\delta(s, v) = \infty$. In diesem Fall gibt es keinen Pfad von s nach u. Somit gilt:

$$\infty = \delta(s, v) \leq \delta(s, u) + w(u, v) = \infty$$

Eigenschaften der Relaxation

Eigenschaft 2. (Obere Schranke)
Sei $G = (V, E)$ ein gerichteter Graph mit Gewichtsfunktion $w : E \mapsto \mathbb{R}$. Sei $s \in V$ ein beliebiger Knoten. Angenommen, die d- und π-Tabellen wurden mittels der Funktion InitializeSingleSource(G, s) initialisiert.

Dann gilt:

- $d[v] \geq \delta(s, v)$ für alle Knoten $v \in V$. Diese Eigenschaft bleibt erhalten unabhängig von der Anzahl der Relaxationsschritte auf Kanten in G.
- Erreicht $d[v]$ die untere Schranke $\delta(s, v)$, dann wird der Wert von $d[v]$ nicht mehr verändert.

Eigenschaften der Relaxation (Forts.)

Beweis mittels Induktion über die Anzahl der Relaxationsschritte.

Induktionsanfang: Nach der Initialisierung gilt: $d[v] = \infty \geq \delta(s, v)$ für alle $v \in V$. Insbesondere gilt $d[s] = 0 \geq \delta(s, s)$.

Induktionsschritt: Laut Induktionsannahme gilt $d[v] \geq \delta(s, v)$ für alle $x \in V$. Betrachte die Relaxation der Kante (u, v). Der einzige d-Wert, der sich ändert ist, $d[v]$.

Eigenschaften der Relaxation (Forts.)

Bei einer Änderung gilt:

$$\begin{aligned} d[v] &= d[u] + w(u,v) \\ &\geq \delta(s,u) + w(u,v) \quad \text{(laut Induktionsannahme)} \\ &\geq \delta(s,v) \quad \text{(Dreiecksungleichung)} \end{aligned}$$

Falls $d[v] = \delta(s,v)$, dann kann sich dieser Wert nicht mehr ändern, denn

- es muss $d[v] \geq \delta(s,v)$ gelten, und
- während der Relaxation werden die d-Werte nicht vergrößert.

Eigenschaften der Relaxation (Forts.)

Eigenschaft 3. (Kein Pfad)
Sei $G = (V, E)$ ein gerichteter Graph mit Gewichtsfunktion $w : E \mapsto \mathbb{R}$. Sei $s \in V$ ein beliebiger Knoten. Angenommen, es führt kein Pfad von s zu einem Knoten $v \in V$.
Nach der Initialisierung der d- und π-Tabellen gilt $d[v] = \delta(s,v) = \infty$. Dieser Wert wird durch die Relaxation nicht mehr verändert.

Beweis. Direkte Konsequenz der Obere Schranke Eigenschaft.

Eigenschaften der Relaxation (Forts.)

Eigenschaft 4. (Konvergenz)
Sei $G = (V, E)$ ein gerichteter Graph mit Gewichtsfunktion $w : E \mapsto \mathbb{R}$. Sei $s \in V$ ein beliebiger Knoten. Sei $s \rightsquigarrow u \rightarrow v$ ein kürzester Pfad von s nach v in G. Angenommen, die d- und π-Tabellen wurden initialisiert und es wurde $\textsc{Relax}(u, v, w)$ für die Kante (u, v) aufgerufen. Falls vor dem Aufruf $d[u] = \delta(s, u)$ war, dann gilt nach dem Aufruf $d[v] = \delta(s, v)$.

Beobachtung: Sei $G = (V, E)$ ein gerichteter Graph mit Gewichtsfunktion $w : E \mapsto \mathbb{R}$. Sei $(u, v) \in E$ eine beliebige Kante. Unmittelbar nach der Relaxation mittels $\textsc{Relax}(u, v, w)$ gilt $d[v] \leq d[u] + w(u, v)$.

Eigenschaften der Relaxation (Forts.)

Beweis. Obere Schranke Eigenschaft: Nimmt $d[u]$ den Wert $\delta(s, u)$ an, dann wird dieser Wert nicht mehr verändert.

Nach Relaxation der Kante (u, v) gilt:

$$\begin{aligned} d[v] &\leq d[u] + w(u, v) \quad \text{(obige Beobachtung)} \\ &= \delta(s, u) + w(u, v) \\ &= \delta(s, v) \quad \text{(Lemma 1)} \end{aligned}$$

Obere Schranke Eigenschaft: $d[v] \geq \delta(s, v)$.

Somit $d[v] = \delta(s, v)$.

Eigenschaften der Relaxation (Forts.)

Eigenschaft 5. (Pfad Relaxation)
Sei $G = (V, E)$ ein gerichteter Graph mit Gewichtsfunktion $w : E \mapsto \mathbb{R}$. Sei $s \in V$ ein beliebiger Knoten. Betrachte einen beliebigen kürzesten Pfad $p = \langle v_0, v_1, \ldots, v_k \rangle$ von $s = v_0$ nach v_k. Angenommen, die d- und π-Tabellen wurden initialisiert und es wurde eine Folge von Relaxationen durchgeführt.

Falls die Kanten $(v_0, v_1), (v_1, v_2), \ldots, (v_{k-1}, v_k)$ in genau dieser Reihenfolge relaxiert wurden, dann gilt danach $d[v_k] = \delta(s, v_k)$. Dieser Wert wird nicht mehr verändert.

Die Relaxation anderer Kanten vor, mitten und nach der Relaxation der obigen Kantenfolge wirkt sich nicht auf den Wert von $d[v_k]$ aus.

Eigenschaften der Relaxation (Forts.)

Beweis mittels Induktion über die Länge des Pfades p.

Induktionsbehauptung: Nach der Relaxation der Kante (v_{i-1}, v_i) gilt $d[v_i] = \delta(s, v_i)$.

Induktionsanfang: $i = 0$. $d[s] = 0 = \delta(s, s) = \delta(v_0, v_0)$ ✓

Induktionsschritt: $i - 1 \rightsquigarrow i$. Angenommen, $d[v_{i-1}] = \delta(s, v_{i-1})$. Betrachte den Aufruf $\textsc{Relax}(v_{i-1}, v_i, w)$. Wegen der Konvergenzeigenschaft gilt nach dem Aufruf, das $d[v_i] = \delta(s, v_i)$.

Bellman-Ford Algorithmus

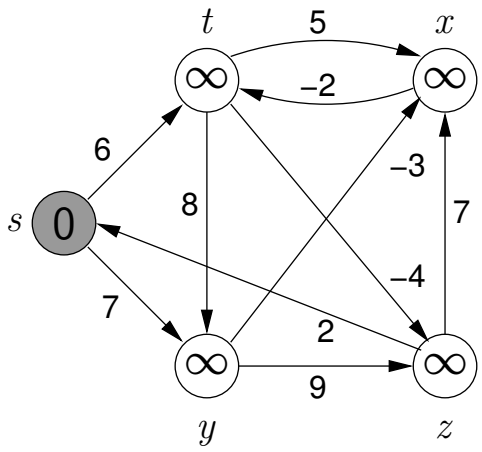
- Erfunden von Richard Bellman und Lester Ford in den 1960er Jahren
- Berechnung von kürzesten Pfaden ausgehend von einem Startknoten s
- Für Graphen mit negativen Kantengewichten geeignet
- Zyklen mit negativem Gewicht werden erkannt
- Einsatz von Relaxation zur schrittweisen Verkleinerung der Einträge in der d-Tabelle
- Der Algorithmus wird unter anderem in Distance Vector Routing Protokollen (z.B. RIP) eingesetzt
- Laufzeit $O(\|V\| \cdot \|E\|)$

Bellman-Ford Algorithmus

BellmanFord(G, w, s)
Input: Gerichteter Graph $G = (V, E)$,
Gewichtsfunktion w, Startknoten s
Output: `true` genau dann, wenn es in G keine Zyklen mit negativen Gewicht gibt, die von s aus erreichbar sind

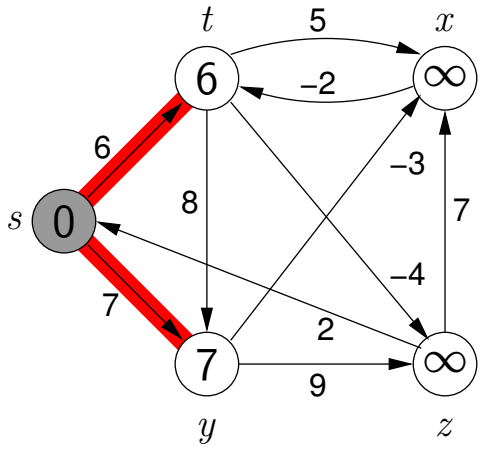
```
1  InitializeSingleSource(G, s)
2  for i := 1 to ||V|| − 1 do
3    for jede Kante (u, v) ∈ E do
4      Relax(u, v)
5  for jede Kante (u, v) ∈ E do
6    if d[v] > d[u] + w(u, v) then
7      return false
8  return true
```

Bellman-Ford Beispiel



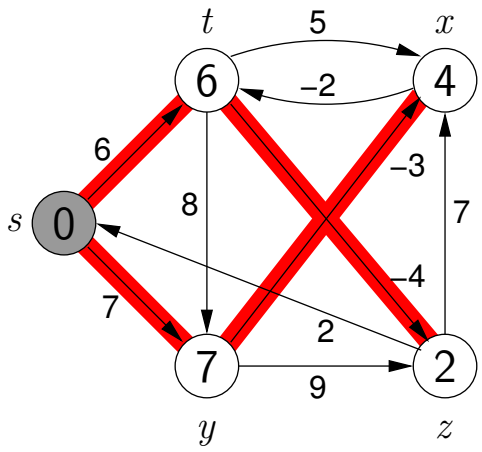
v	s	t	x	y	z
$d[v]$	0	∞	∞	∞	∞
$\pi[v]$	—	—	—	—	—

Bellman-Ford Beispiel (Forts.)



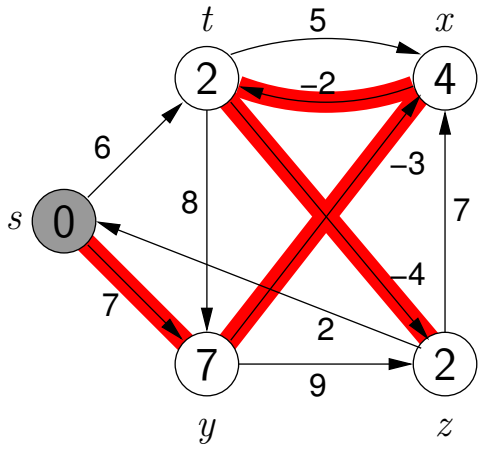
v	s	t	x	y	z
$d[v]$	0	6	∞	7	∞
$\pi[v]$	—	s	—	s	—

Bellman-Ford Beispiel (Forts.)



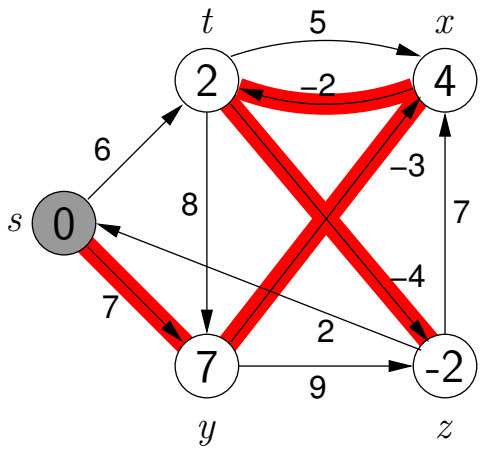
v	s	t	x	y	z
$d[v]$	0	6	4	7	2
$\pi[v]$	—	s	y	s	t

Bellman-Ford Beispiel (Forts.)



v	s	t	x	y	z
$d[v]$	0	2	4	7	2
$\pi[v]$	—	x	y	s	t

Bellman-Ford Beispiel (Forts.)



v	s	t	x	y	z
$d[v]$	0	2	4	7	-2
$\pi[v]$	—	x	y	s	t

Korrektheit Bellman-Ford Algorithmus

Lemma 2. Sei $G = (V, E)$ ein gerichteter Graph mit Gewichtsfunktion $w : E \mapsto \mathbb{R}$. Sei $s \in V$ ein beliebiger Knoten. Angenommen, von s aus sind keine Zyklen mit negativem Gewicht erreichbar. Dann gilt nach $\|V\| - 1$ Iterationen der for Schleife in Zeile 2–4 von $\textsc{BellmanFord}(G, w, s)$, dass $d[v] = \delta(s, v)$ für alle Knoten $v \in V$, die von s aus erreichbar sind.

Korollar. Sei $G = (V, E)$ ein gerichteter Graph mit Gewichtsfunktion $w : E \mapsto \mathbb{R}$. Sei $s \in V$ ein beliebiger Knoten. Für jeden Knoten $v \in V$ gilt: Es gibt einen Pfad von s nach v genau dann, wenn nach Ausführung von $\textsc{BellmanFord}(G, s)$ $d[v] < \infty$ gilt.

Korrektheit Bellman-Ford Algorithmus (Forts.)

Beweis. Sei v ein Knoten, der von s aus erreichbar ist. Dann gibt es einen Pfad $p = \langle v_0, v_1, \ldots, v_k \rangle$ mit $v_0 = s$ und $v_k = v$.

p hat höchstens $\|V\| - 1$ Kanten, also ist $k \leq \|V\| - 1$.

In jeder der $\|V\| - 1$ Iterationen der for Schleife werden alle Kanten in E relaxiert.

In der i-ten Iteration wird insbesondere auch die Kante (v_{i-1}, v_i) relaxiert, wobei $i = 1, 2, \ldots, k$.

Pfad Relaxation Eigenschaft: $d[v] = d[v_k] = \delta(s, v_k) = \delta(s, v)$

Korrektheit Bellman-Ford Algorithmus (Forts.)

Satz. Sei $G = (V, E)$ ein gerichteter Graph mit Gewichtsfunktion $w : E \mapsto \mathbb{R}$. Sei $s \in V$ ein beliebiger Knoten. Betrachte die Ausführung von $\textsc{BellmanFord}(G, s)$.

Es gilt:

- Falls G keine von s aus erreichbaren negativen Zyklen enthält, dann liefert der Algorithmus `true` zurück. Ferner gilt $d[v] = \delta(s, v)$ für alle $v \in V$.
- Falls G einen von s aus erreichbaren negativen Zyklus enthält, liefert der Algorithmus `false` zurück.

Korrektheit Bellman-Ford Algorithmus (Forts.)

Beweis.

Fall 1: G besitzt keinen negativen Zyklus, der von s aus erreichbar ist.

- Wegen Lemma 2 gilt für alle von s aus erreichbaren Knoten v, dass $d[v] = \delta(s, v)$. Der Pfad von s nach v ist (in umgekehrter Richtung) in der π-Tabelle gespeichert.
- Ist v von s aus nicht erreichbar, dann greift die Kein-Pfad-Eigenschaft, d.h., es gilt $d[u] = \delta(s, v) = \infty$.

Korrektheit Bellman-Ford Algorithmus (Forts.)

Fall 2: in G gibt es einen negativen Zyklus $c = \langle v_0, v_1, \ldots, v_k \rangle$ mit $v_0 = v_k$, der von s aus erreichbar ist. Es gilt:

$$\sum_{i=1}^{k} w(v_{i-1}, v_i) < 0.$$

Angenommen, BellmanFord(G, s) gibt `true` zurück. Dann muss für alle Kanten (u, v) die Ungleichung

$$d[v] \leq d[u] + w(u, v)$$

gelten.

Korrektheit Bellman-Ford Algorithmus (Forts.)

Hieraus folgt:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{k} d[v_i] &\leq \sum_{i=1}^{k} (d[v_{i-1}] + w(v_{i-1}, v_i)) \\ &= \sum_{i=1}^{k} d[v_{i-1}] + \sum_{i=1}^{k} w(v_{i-1}, v_i)\end{aligned}$$

Da $v_0 = v_k$, kommt jeder Knoten des Zyklus genau einmal in den Summen $\sum_{i=1}^{k} d[v_i]$ und $\sum_{i=1}^{k} d[v_{i-1}]$ vor. Wegen des obigen Korollars gilt $d[v_i] < \infty$ für alle $i = 1, \ldots, k$. Somit:

$$\sum_{i=1}^{k} w(v_{i-1}, v_i) \geq 0$$

Widerspruch!

Dijkstra Algorithmus

- Entwicklung von Edsger W. Dijkstra aus dem Jahre 1959
- Berechnung der kürzesten Pfade ausgehend von einem Startknoten s zu allen erreichbaren Knoten
- Voraussetzung: es gibt keine negativen Kantengewichte
- Greedy Algorithmus
- Einsatz einer Min Priority Queue
- Standardalgorithmus für die Berechnung von kürzesten Pfaden
- Laufzeit: $O((\|V\| + \|E\|) \log_2 \|V\|)$

DIJKSTRA(G, s)

DIJKSTRA(G, w, s)

Input: Gerichteter Graph $G = (V, E)$, Gewichtsfunktion w mit $w(u, v) \geq 0$ für alle $(u, v) \in E$, Startknoten s

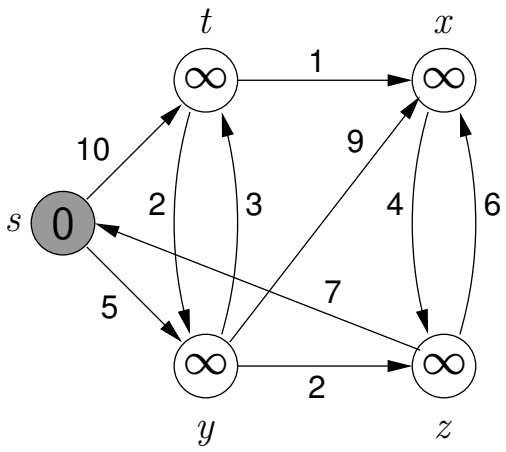
```
1  INITIALIZESINGLESOURCE(G, s)
2  S := ∅
3  Füge die Knoten in V in die Min Priority Queue Q ein
4  while Q ist nicht leer do
5     u := EXTRACTMIN(Q)
6     S := S ∪ {u}
7     for jeden Knoten v ∈ Adj[u] do
8        if (RELAX(u, v, w) = true) and (v ∉ S) then
9           DECREASEKEY(Q, v, d[v])
```


Laufzeit des Dijkstra Algorithmus

- Das Einfügen der Elemente in die Queue hat den Aufwand $O(\|V\| \log_2 \|V\|)$
- Der RELAX-Aufruf in Zeile 8 wirkt sich auf die Reihenfolge der Knoten in der Queue aus. Die Umordnung der Elemente in der Queue hat den Aufwand $O(\log_2 \|V\|)$
- Sind alle Knoten von s erreichbar, dann wird jede Kante relaxt. Aufwand: $O(\|E\| \log_2 \|V\|)$.
- Gesamtlaufzeit:

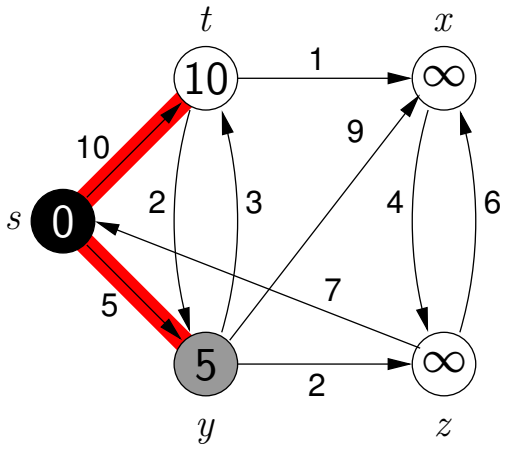
$$O(\|V\| \log_2 \|V\|) + O(\|E\| \log_2 \|V\|) = O((\|V\| + \|E\|) \log_2 \|V\|)$$

Dijkstra Beispiel



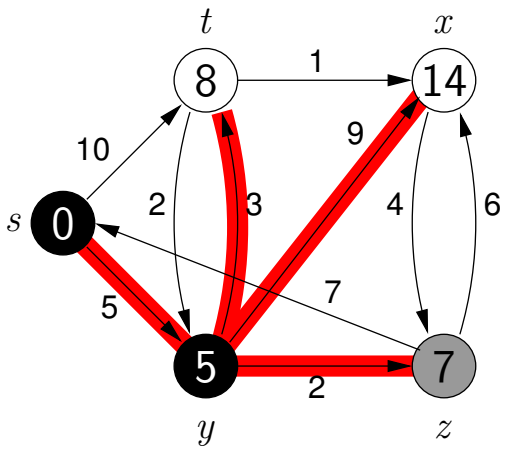
v	s	t	x	y	z
$d[v]$	0	∞	∞	∞	∞
$\pi[v]$	—	—	—	—	—

Dijkstra Beispiel (Forts.)



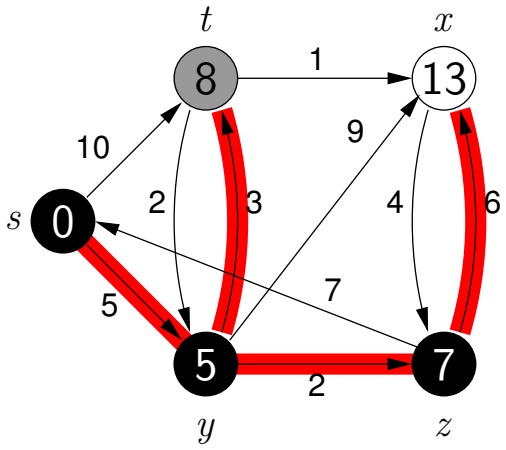
v	s	t	x	y	z
$d[v]$	0	10	∞	5	∞
$\pi[v]$	—	s	—	s	—

Dijkstra Beispiel (Forts.)



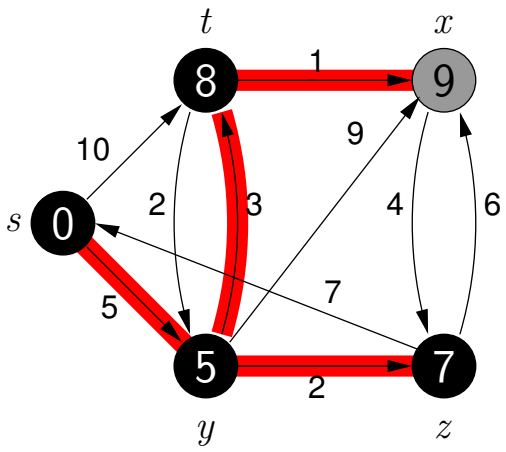
v	s	t	x	y	z
$d[v]$	0	8	14	5	7
$\pi[v]$	—	y	y	s	y

Dijkstra Beispiel (Forts.)



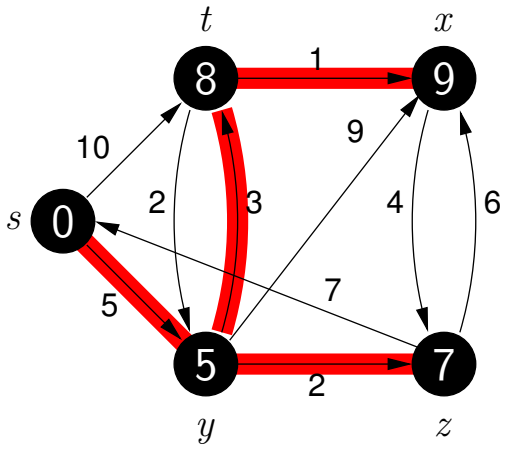
v	s	t	x	y	z
$d[v]$	0	8	13	5	7
$\pi[v]$	—	y	z	s	y

Dijkstra Beispiel (Forts.)



v	s	t	x	y	z
$d[v]$	0	8	9	5	7
$\pi[v]$	—	y	t	s	y

Dijkstra Beispiel (Forts.)



v	s	t	x	y	z
$d[v]$	0	8	9	5	7
$\pi[v]$	—	y	t	s	y

Korrektheit des Dijkstra Algorithmus

Satz. Sei $G = (V, E)$ ein gerichteter Graph mit nicht-negativen Kantengewichten und sei $s \in V$. Dann gilt nach dem Aufruf $\textsc{Dijkstra}(G, s)$ $d[v] = \delta(s, v)$ für alle Knoten $v \in V$.

Beweis. Zu zeigen ist die folgende Schleifeninvariante:

> *Zu Beginn jedes Durchlaufs der while Schleife in Zeile 4–8 gilt $d[v] = \delta(s, v)$ für alle Knoten $v \in S$.*

Beobachtung: Es genügt zu zeigen, dass $d[u] = \delta(s, u)$ gilt, wenn u zu S hinzugefügt wird. Wegen der Obere Schranke Eigenschaft kann sich dieser Wert dann nicht mehr ändern.

Korrektheit des Dijkstra Algorithmus (Forts.)

Initialisierung: Zu Beginn ist S leer und die Invariante trivialerweise korrekt ✓

Aufrechterhaltung: Angenommen, u ist der erste Knoten, der zu S hinzugefügt wird, für den $d[u] \neq \delta(s, u)$ gilt.

Es muss $s \neq u$ gelten, da $d[s] = \delta(s, s) = 0$ zum Zeitpunkt des Einfügens von s in S gilt. Folglich war S nicht leer, bevor u hinzugefügt wurde.

Ferner existiert ein Pfad von s nach u. Andernfalls wäre $d[u] = \delta(s, u) = \infty$ (Kein-Pfad-Eigenschaft) und somit $d[u] = \delta(s, u)$.

Korrektheit des Dijkstra Algorithmus (Forts.)

Sei p ein kürzester Pfad von s nach u. Vor dem Hinzufügen von u zu S verbindet p den Knoten $s \in S$ mit dem Knoten $u \in V \setminus S$.

Betrachte nun den Zeitpunkt, an dem u aus der Queue entfernt wird.

Sei y der erste Knoten auf dem Pfad, der in $V \setminus S$ enthalten ist. Sei $x \in S$ der Vorgänger von y auf dem Pfad.

Der Pfad p ist wie folgt aufgebaut:

$$s \overset{p_1}{\rightsquigarrow} x \longrightarrow y \overset{p_2}{\rightsquigarrow} u$$

Laut Invariante gilt zum Zeitpunkt, zu dem x zu S hinzugefügt wird, $d[x] = \delta(s, x)$.

Danach wird die Kante (x, y) relaxt. Wegen der Konvergenzeigenschaft folgt, dass $d[y] = \delta(s, y)$ sein muss.

Korrektheit des Dijkstra Algorithmus (Forts.)

Da y vor u auf p liegt und es keine negativen Kantengewichte gibt, folgt:

$$\begin{aligned} d[y] &= \delta(s, y) \\ &\leq \delta(s, u) \\ &\leq d[u] \qquad \text{(wegen Obere-Schranke-Eigenschaft)} \end{aligned}$$

Sowohl u als auch y sind in $V \setminus S$. Da u vor y aus der Queue genommen wird, muss $d[u] \leq d[y]$ gelten. Hieraus folgt:

$$d[y] = \delta(s, y) = \delta(s, u) = d[u].$$

Widerspruch! Also muss $d[u] = \delta(s, u)$ sein.

Korrektheit des Dijkstra Algorithmus (Forts.)

Beendigung: Nach Beendigung der while Schleife ist die Queue Q leer. Da sie zu Beginn alle Knoten enthielt, muss $S = V$ sein. Gemäß Invariante gibt für alle $v \in V$, dass $d[v] = \delta(s, v)$.

All-Pairs Shortest Paths

Gegeben: Gerichteter Graph $G = (V, E)$

Aufgabe: Berechne für jedes Knotenpaar u, v einen kürzesten Pfad $u \overset{p}{\rightsquigarrow} v$.

Alternativen:

- Führe den Bellman-Ford Algorithmus aus für jeden Knoten $s \in V \rightsquigarrow$ Laufzeit $O(\|V\|^2\|E\|)$
- Führe den Dijkstra Algorithmus aus für jeden Knoten $s \in V \rightsquigarrow$ Laufzeit $O(\|V\|(\|V\| + \|E\|)\log_2 \|V\|)$
- Benutze den Algorithmus von Floyd Warshall $\rightsquigarrow$ Laufzeit $O(\|V\|^3)$

Floyd Warshall Algorithmus

- Berechnung eines kürzesten Pfads für alle Knotenpaare (u, v) in V
- Technik: Dynamisches Programmieren
- Annahme: $V = \{1, 2, \ldots, n\}$
- Idee: Berechne die $n \times n$ Matrizen $D^{(0)}, D^{(1)}, \ldots, D^{(n)}$
- $D^k[u, v]$ steht für die Länge des kürzesten Pfads von u nach v, der ausschließlich Zwischenknoten aus $\{1, \ldots, k\}$ enthält
- Pfadinformationen werden in den Matrizen $\Pi^{(k)}$, $k = 0, 1, \ldots, n$ gespeichert
- Laufzeit: $\Theta(\|V\|^3)$

Einfache Pfade und Zwischenknoten

Definition. Sei $G = (V, E)$ ein Graph.

- Ein Pfad $p = \langle v_1, v_2, \ldots, v_l \rangle$ in G nennt man einfach, falls er keine Zyklen enthält.
- Sei p ein einfacher Pfad. Ein Knoten v_i auf p heißt Zwischenknoten, falls $v_i \neq v_1$ und $v_i \neq v_l$.

Idee hinter dem Floyd Warshall Algorithmus

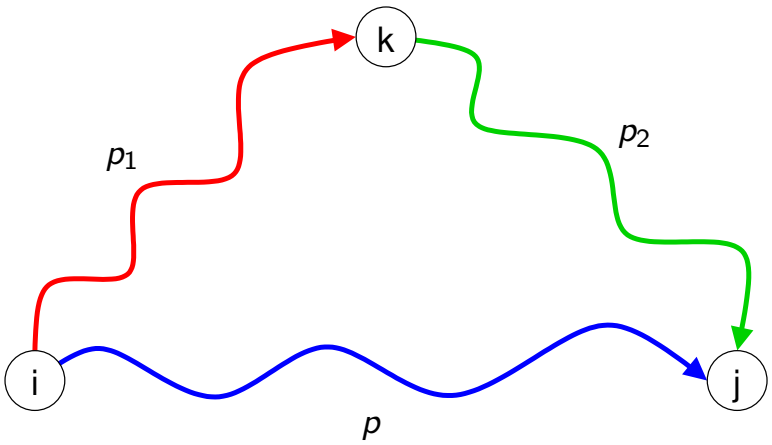
Annahme: $V = \{1, 2, \ldots, n\}$

Gegeben: Sei $k \in \{1, \ldots, n\}$. Betrachte alle für ein beliebiges Paar i, j von Knoten alle einfachen Pfade von i nach j, die ausschließlich Zwischenknoten in $\{1, \ldots, k\}$ enthalten. Sei p ein solcher Pfad mit minimalem Gewicht.

Beobachtung:

- Fall 1: k ist kein Zwischenknoten auf p, d.h., alle Zwischenknoten auf p sind in $\{1, \ldots, k-1\}$.
- Fall 2: k ist ein Zwischenknoten auf p. Dann kann man p zerlegen in $i \overset{p_1}{\rightsquigarrow} k \overset{p_2}{\rightsquigarrow} j$, wobei die Zwischenknoten auf p_1 und p_2 in $\{1, \ldots, k-1\}$ sind.

Idee Floyd Warshall Algorithmus (Forts.)



Gegeben: Pfade p, p_1 und p_2 von i nach j mit minimalem Gewichten und Zwischenknoten in $\{1, \ldots, k-1\}$

Frage: Bringt der Knoten k eine Verbesserung?

Rekursionsgleichungen

Abstandsmatrix $D^{(k)}$:

- $k = 0$: $D^{(k)}[i,j] = w(i,j)$
- $k \geq 1$: $D^{(k)}[i,j] = \min(D^{(k-1)}[i,j], D^{(k-1)}[i,k] + D^{(k-1)}[k,j])$

Vorgängermatrix $\Pi^{(0)}$:

- $i \neq j$ und $w(i,j) < \infty$: $\Pi^{(0)}[i,j] = i$
- Ansonsten: $\Pi^{(0)}[i,j] = \texttt{NIL}$

Vorgängermatrix $\Pi^{(k)}$, $k = 1, 2, \ldots, n$:

- $D^{(k-1)}[i,j] \leq D^{(k-1)}[i,k] + D^{(k-1)}[k,j]$: $\Pi^{(k)}[i,j] = \Pi^{(k-1)}[i,j]$
- Ansonsten: $\Pi^{(k)}[i,j] = \Pi^{(k-1)}[k,j]$

Algorithmus FloydWarshall(W)

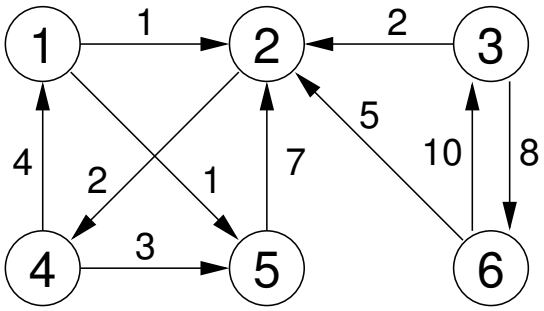
FloydWarshall(W)
Input: Abstandsmatrix W

```
1 n := rows(W)
2 D^(0) := W
3 for i := 1 to n do
4   for j := 1 to n do
5     if i ≠ j and w(i,j) < ∞ then
6       Π^(0)[i,j] := i
7     else
8       Π^(0)[i,j] := NIL
```

Algorithmus FloydWarshall(W) (Forts.)

```
9  for k := 1 to n do
10   for i := 1 to n do
11     for j := 1 to n do
12       if D^(k-1)[i,j] ≤ D^(k-1)[i,k] + D^(k-1)[k,j] then
13         D^(k)[i,j] := D^(k-1)[i,j]
14         Π^(k)[i,j] := Π^(k-1)[i,j]
15       else
16         D^(k)[i,j] := D^(k-1)[i,k] + D^(k-1)[k,j]
17         Π^(k)[i,j] := Π^(k-1)[k,j]
```


Beispiel FloydWarshall(W)



Beispiel FloydWarshall(W) (Forts.)

$k = 0$:

$$D^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \infty & \infty & 1 & \infty \\ \infty & 0 & \infty & 2 & \infty & \infty \\ \infty & 2 & 0 & \infty & \infty & 8 \\ 4 & \infty & \infty & 0 & 3 & \infty \\ \infty & 7 & \infty & \infty & 0 & \infty \\ \infty & 5 & 10 & \infty & \infty & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Pi^{(0)} = \begin{pmatrix} - & 1 & - & - & 1 & - \\ - & - & - & 2 & - & - \\ - & 3 & - & - & - & 3 \\ 4 & - & - & - & 4 & - \\ - & 5 & - & - & - & - \\ - & 6 & 6 & - & - & - \end{pmatrix}$$

Beispiel FloydWarshall(W) (Forts.)

$k = 1$:

$$D^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \infty & \infty & 1 & \infty \\ \infty & 0 & \infty & 2 & \infty & \infty \\ \infty & 2 & 0 & \infty & \infty & 8 \\ 4 & 5 & \infty & 0 & 3 & \infty \\ \infty & 7 & \infty & \infty & 0 & \infty \\ \infty & 5 & 10 & \infty & \infty & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Pi^{(1)} = \begin{pmatrix} - & 1 & - & - & 1 & - \\ - & - & - & 2 & - & - \\ - & 3 & - & - & - & 3 \\ 4 & 1 & - & - & 4 & - \\ - & 5 & - & - & - & - \\ - & 6 & 6 & - & - & - \end{pmatrix}$$

Beispiel FloydWarshall(W) (Forts.)

$k = 2$:

$$D^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \infty & 3 & 1 & \infty \\ \infty & 0 & \infty & 2 & \infty & \infty \\ \infty & 2 & 0 & 4 & \infty & 8 \\ 4 & 5 & \infty & 0 & 3 & \infty \\ \infty & 7 & \infty & 9 & 0 & \infty \\ \infty & 5 & 10 & 7 & \infty & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Pi^{(2)} = \begin{pmatrix} - & 1 & - & 2 & 1 & - \\ - & - & - & 2 & - & - \\ - & 3 & - & 2 & - & 3 \\ 4 & 1 & - & - & 4 & - \\ - & 5 & - & 2 & - & - \\ - & 6 & 6 & 2 & - & - \end{pmatrix}$$

Beispiel FloydWarshall(W) (Forts.)

$k = 3$:

$$D^{(3)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \infty & 3 & 1 & \infty \\ \infty & 0 & \infty & 2 & \infty & \infty \\ \infty & 2 & 0 & 4 & \infty & 8 \\ 4 & 5 & \infty & 0 & 3 & \infty \\ \infty & 7 & \infty & 9 & 0 & \infty \\ \infty & 5 & 10 & 7 & \infty & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Pi^{(3)} = \begin{pmatrix} - & 1 & - & 2 & 1 & - \\ - & - & - & 2 & - & - \\ - & 3 & - & 2 & - & 3 \\ 4 & 1 & - & - & 4 & - \\ - & 5 & - & 2 & - & - \\ - & 6 & 6 & 2 & - & - \end{pmatrix}$$

Beispiel FloydWarshall(W) (Forts.)

$k = 4$:

$$D^{(4)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \infty & 3 & 1 & \infty \\ 6 & 0 & \infty & 2 & 5 & \infty \\ 8 & 2 & 0 & 4 & 7 & 8 \\ 4 & 5 & \infty & 0 & 3 & \infty \\ 13 & 7 & \infty & 9 & 0 & \infty \\ 11 & 5 & 10 & 7 & 10 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Pi^{(4)} = \begin{pmatrix} - & 1 & - & 2 & 1 & - \\ 4 & - & - & 2 & 4 & - \\ 4 & 3 & - & 2 & 4 & 3 \\ 4 & 1 & - & - & 4 & - \\ 4 & 5 & - & 2 & - & - \\ 4 & 6 & 6 & 2 & 4 & - \end{pmatrix}$$

Beispiel FloydWarshall(W) (Forts.)

$k = 5$:

$$D^{(5)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \infty & 3 & 1 & \infty \\ 6 & 0 & \infty & 2 & 5 & \infty \\ 8 & 2 & 0 & 4 & 7 & 8 \\ 4 & 5 & \infty & 0 & 3 & \infty \\ 13 & 7 & \infty & 9 & 0 & \infty \\ 11 & 5 & 10 & 7 & 10 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Pi^{(5)} = \begin{pmatrix} - & 1 & - & 2 & 1 & - \\ 4 & - & - & 2 & 4 & - \\ 4 & 3 & - & 2 & 4 & 3 \\ 4 & 1 & - & - & 4 & - \\ 4 & 5 & - & 2 & - & - \\ 4 & 6 & 6 & 2 & 4 & - \end{pmatrix}$$

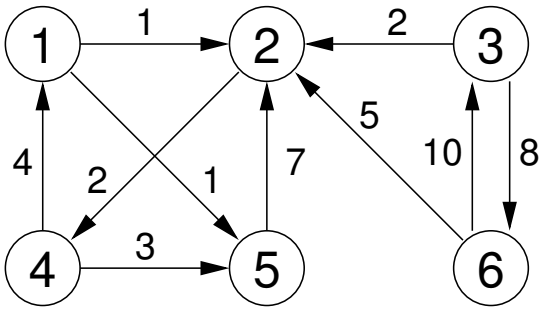
Beispiel FloydWarshall(W) (Forts.)

$k = 6$:

$$D^{(6)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \infty & 3 & 1 & \infty \\ 6 & 0 & \infty & 2 & 5 & \infty \\ 8 & 2 & 0 & 4 & 7 & 8 \\ 4 & 5 & \infty & 0 & 3 & \infty \\ 13 & 7 & \infty & 9 & 0 & \infty \\ 11 & 5 & 10 & 7 & 10 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Pi^{(6)} = \begin{pmatrix} - & 1 & - & 2 & 1 & - \\ 4 & - & - & 2 & 4 & - \\ 4 & 3 & - & 2 & 4 & 3 \\ 4 & 1 & - & - & 4 & - \\ 4 & 5 & - & 2 & - & - \\ 4 & 6 & 6 & 2 & 4 & - \end{pmatrix}$$

Beispiel FloydWarshall(W) (Forts.)



$$D^{(6)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \infty & 3 & 1 & \infty \\ 6 & 0 & \infty & 2 & 5 & \infty \\ 8 & 2 & 0 & 4 & 7 & 8 \\ 4 & 5 & \infty & 0 & 3 & \infty \\ 13 & 7 & \infty & 9 & 0 & \infty \\ 11 & 5 & 10 & 7 & 10 & 0 \end{pmatrix} \qquad \Pi^{(6)} = \begin{pmatrix} - & 1 & - & 2 & 1 & - \\ 4 & - & - & 2 & 4 & - \\ 4 & 3 & - & 2 & 4 & 3 \\ 4 & 1 & - & - & 4 & - \\ 4 & 5 & - & 2 & - & - \\ 4 & 6 & 6 & 2 & 4 & - \end{pmatrix}$$

Zusammenfassung

- Die Berechnung von kürzesten Pfaden in Graphen ist die Grundlage für viele Anwendungen
- Enthält der Graph negative Zyklen, dann ist Vorsicht geboten
- Single Source Shortest Path Problem
  - Algorithmus von Bellman-Ford
  - Algorithmus von Dijkstra
- All Pairs Shortest Paths Problem
  - Algorithmus von Floyd-Warshall
  - Algorithmus von Johnson (für dünne Graphen)