Algorithmen und Datenstrukturen 2

Lerneinheit 6: Minimal aufspannende Bäume

Prof. Dr. Christoph Karg

Studiengang Informatik
Hochschule Aalen

Sommersemester 2016

2.6.2015

Einleitung

Thema dieser Lerneinheit sind Algorithmen für Minimal aufspannende Bäume (Minimum Spanning Trees).

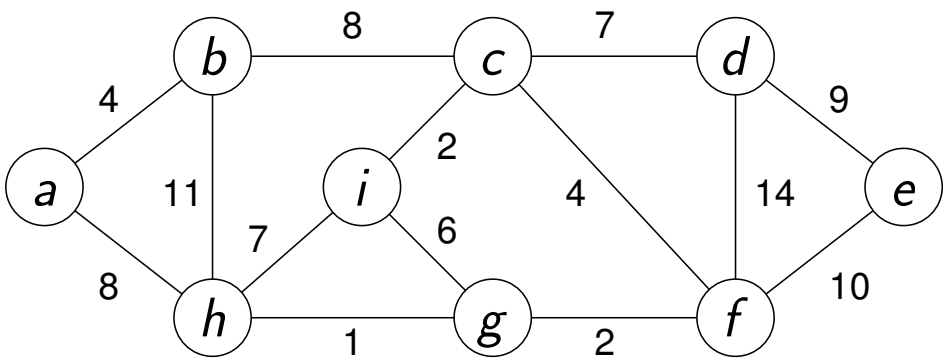
Sie gliedert sich in folgende Abschnitte:

- Generischer Algorithmus
- Algorithmus von Kruskal
- Algorithmus von Prim

Gewichtete Graphen

- Ein gewichteter Graph ist ein gerichteter oder ungerichteter Graph, dessen Kanten mit Zahlenwerten versehen sind
- Die Zahlenwerte werden mittels Gewichtsfunktion $w : E \mapsto \mathbb{R}$ zugewiesen
- Die Kantengewichte werden in modifizierten Adjazenzlisten bzw.-matrizen gespeichert

Beispiel gewichteter Graph



Minimum Spanning Tree Problem

Gegeben:

- Ein ungerichteter zusammenhängender Graph $G = (V, E)$
- Gewichtsfunktion $w : E \mapsto \mathbb{R}$

Aufgabe: Berechne $T \subseteq E$ mit folgenden Eigenschaften:

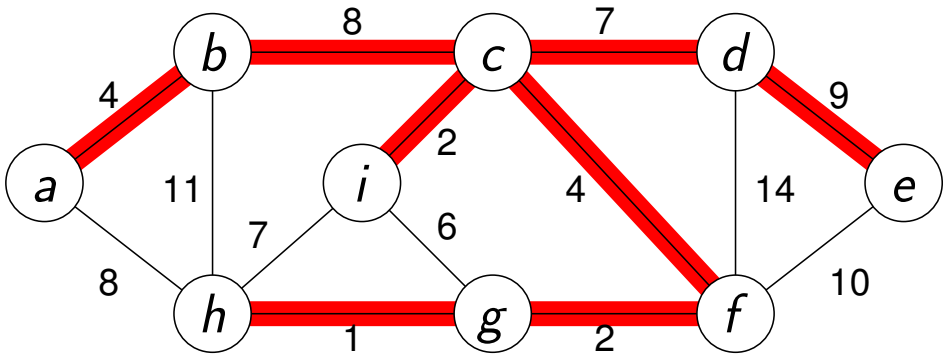
- $G_T = (V, T)$ ist azyklischer zusammenhängender Graph
- Das Gewicht der Kanten in T

$$w(T) = \sum_{(u,v)\in T} w(u, v)$$

ist minimal

Beispiel Minimal aufspannender Baum

Ein Minimal aufspannender Baum (MST) für das obige Beispiel:



Generischer Algorithmus

- Gegeben: $G = (V, E)$, $w : E \mapsto \mathbb{R}$
- Ziel: Berechnung eines MST mittels einer Greedy Strategie
- Idee: Konstruiere schrittweise eine Kantenmenge A durch Hinzunahme einer geeigneten Kante
- Schleifeninvariante: Zu Beginn jeder Iteration ist A die Teilmenge eines minimal aufspannenden Baums
- Eine Kante (u, v) heißt sicher für A, falls $A \cup \{(u, v)\}$ die Teilmenge eines minimal aufspannenden Baums ist

Algorithmus GenericMST(G, w)

GenericMST(G, w)
Input: Ungerichteter zusammenhängender Graph $G = (V, E)$,
Gewichtsfunktion $w : E \mapsto \mathbb{R}$
Output: Minimal aufspannender Baum für G

```
1 A := ∅
2 while A ist kein Spannbaum do
3    Finde eine Kante (u, v), die sicher für A ist
4    A := A ∪ {(u, v)}
5 return A
```

Korrektheit von GenericMST(G, w)

Die Schleifeninvariante ist korrekt:

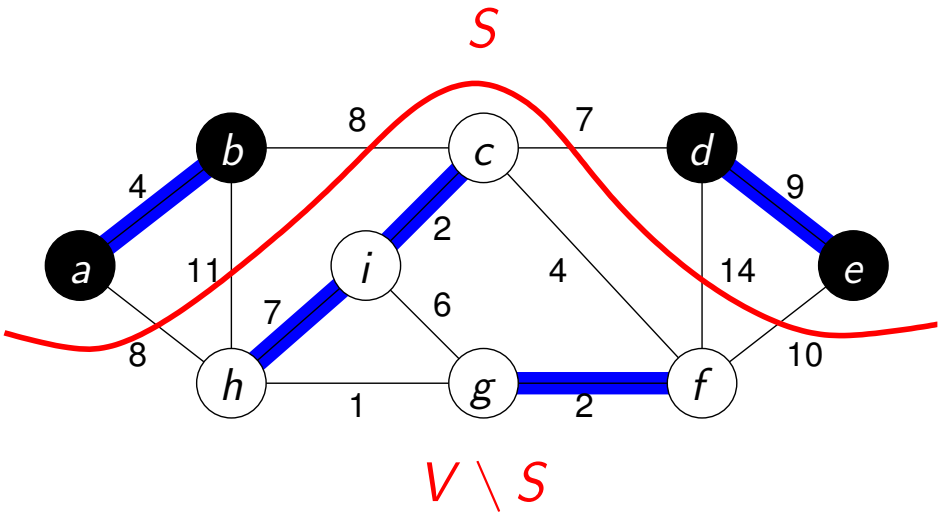
- Initialisierung: Die leere Menge ist immer eine Teilmenge eines MST
- Aufrechterhaltung: Ist A die Teilmenge eines MST, dann ist es auch $A \cup \{(u, v)\}$, da (u, v) eine sichere Kante für A ist
- Terminierung: Da A ausschließlich Kanten eines MST enthält, ist das berechnete Ergebnis ein MST

Frage: Wie bestimmt man eine sichere Kante?

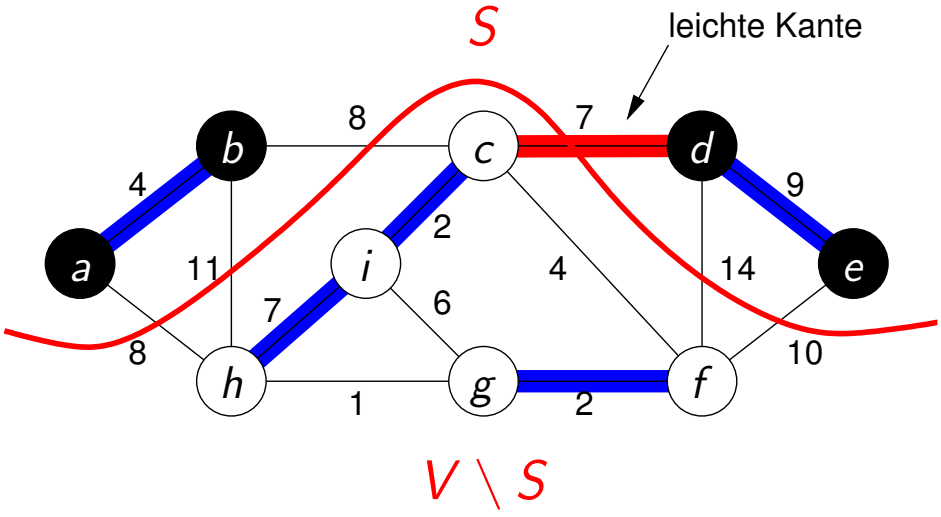
Begriffsdefinitionen

- Ein Schnitt $(S, V \setminus S)$ eines ungerichteten Graphen $G = (V, E)$ ist eine Partition von V
- Eine Kante $(u, v) \in E$ kreuzt den Schnitt $(S, V \setminus S)$, wenn einer der Knoten u und v in S ist und der andere in $V \setminus S$
- Ein Schnitt respektiert eine Kantenmenge $A \subseteq E$, falls keine der Kanten in A den Schnitt kreuzt
- Eine Kante nennt man leichte Kante, wenn sie von allen einen Schnitt kreuzenden Kanten eine mit minimalem Gewicht ist

Beispiel für einen Schnitt



Beispiel für einen Schnitt (Forts.)



Bestimmung einer sicheren Kante

Satz. Gegeben ist ein zusammenhängender ungerichteter Graph $G = (V, E)$ mit zugehöriger Gewichtsfunktion $w : E \mapsto \mathbb{R}$.

- Sei $A \subseteq E$ die Teilmenge eines minimal aufspannenden Baums von G
- Sei $(S, V \setminus S)$ ein Schnitt von G der A respektiert, und
- sei (u, v) eine leichte Kante, die $(S, V \setminus S)$ kreuzt.

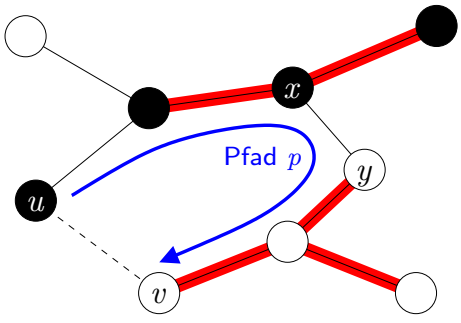
Dann ist die Kante (u, v) sicher für A.

Bemerkung: Der Satz ist die Basis für die Algorithmen von Kruskal und Prim

Beweis

Sei T ein minimaler Spannbaum, der die Kantenmenge A aber nicht die leichte Kante (u, v) enthält

Idee: Konstruiere aus T einen minimalen Spannbaum T', der (u, v) enthält



Beweis (Forts.)

Die Kante (u, v) bildet mit dem Pfad p von u nach v in T einen Zyklus

Da u und v auf verschiedenen Seiten des Schnitts $(S, V \setminus S)$ liegen, gibt es auf dem Pfad p mindestens eine weitere Kante (x, y), die den Schnitt kreuzt

(x, y) ist nicht in A, da der Schnitt A respektiert

Da (x, y) genau einmal auf dem Pfad vorkommt, kann man in T die Kante (x, y) durch (u, v) ersetzen

Der neue Baum $T' = T \setminus \{(x, y)\} \cup \{(u, v)\}$

Beweis (Forts.)

Da die Kanten (u, v) und (x, y) beide den Schnitt kreuzen und (u, v) eine leichte Kante ist, gilt $w(u, v) \leq w(x, y)$

T' ist ein minimaler Spannbaum, denn

$$w(T') = w(T) - w(x, y) + w(u, v) \leq w(T)$$

Da T ein minimaler Spannbaum ist, gilt $w(T') \geq w(T)$

Wegen $A \subseteq T$ und $(x, y) \notin A$, gilt $A \subset T'$.

Da $A \cup \{(u, v)\} \in T'$ und T' ein minimaler Spannbaum ist, ist die Kante (u, v) sicher für A

Somit ist der Satz bewiesen. ✓

Algorithmus von Kruskal

- Die Kantenmenge A ist ein Wald, dessen Komponenten Schritt für Schritt verbunden werden
- Hilfsdatenstruktur: Menge von disjunkten Teilmengen von V mit folgenden Operationen:
  - ▷ $\textsc{MakeSet}(v)$ $\rightsquigarrow$ Menge $\{v\}$ erstellen
  - ▷ $\textsc{FindSet}(v)$ $\rightsquigarrow$ Menge finden, die v enthält
  - ▷ $\textsc{Union}(u, v)$ $\rightsquigarrow$ Vereinigung der Mengen die u bzw. v enthalten
- Greedy Strategie: Auswahl einer leichten Kante (u, v) mit $\textsc{FindSet}(u) \neq \textsc{FindSet}(v)$

Algorithmus $\textsc{MST-Kruskal}(G, w)$

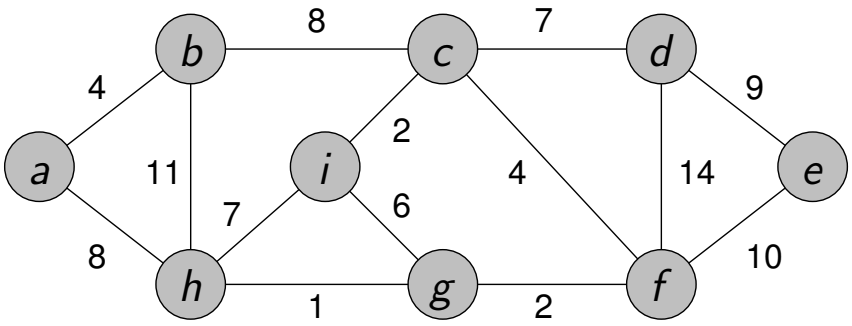
$\textsc{MST-Kruskal}(G, w)$
Input: Zusammenhängender ungerichteter Graph $G = (V, E)$
Gewichtsfunktion $w : E \mapsto \mathbb{R}$
Output: Minimaler Spannbaum T für G

```
1 A := ∅
2 for jeden Knoten v ∈ V do
3   MakeSet(v)
4 Sortiere die Kanten in E gemäß w in aufsteigender
    Reihenfolge
5 for jede Kante (u, v) ∈ E in obiger Reihenfolge do
6   if FindSet(u) ≠ FindSet(v) then
7     A := A ∪ {(u, v)}
8     Union(u, v)
9 return A
```

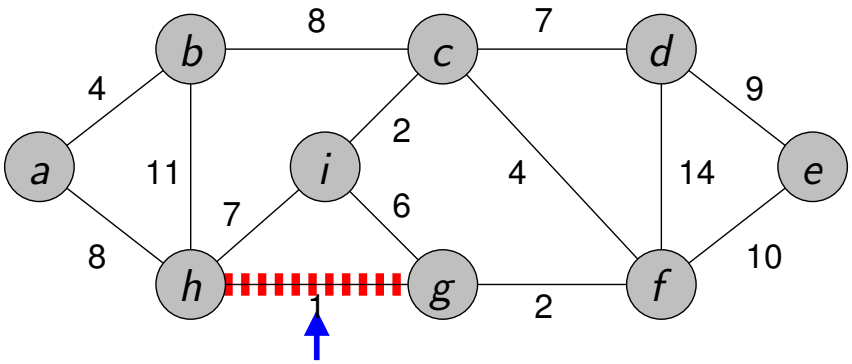
Bemerkungen

- In Zeile 3 werden $\|V\|$ disjunkte Mengen erzeugt
- Die absteigende Sortierung in Zeile 4 ermöglicht eine optimale Kantenauswahl
- Eine Kante wird nur ausgewählt, wenn sie zwei disjunkte Knotenmengen verbindet
- Für Details zur Implementierung der Mengenoperationen siehe Cormen: Abschnitt 21.3 (disjoint set data structures)
- Laufzeit: $O(\|E\| \log_2 \|V\|)$

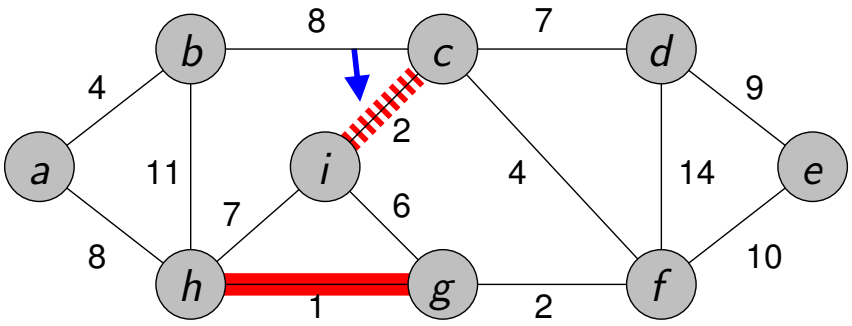
Beispiel Kruskal



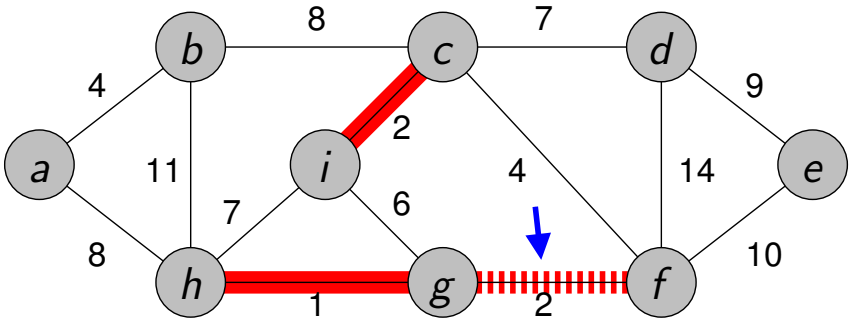
Beispiel Kruskal (Forts.)



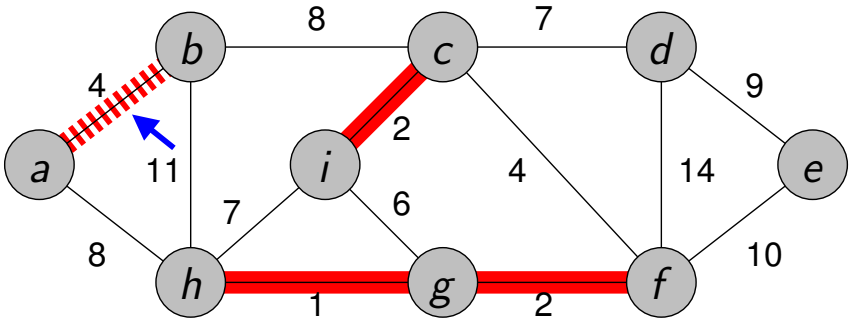
Beispiel Kruskal (Forts.)



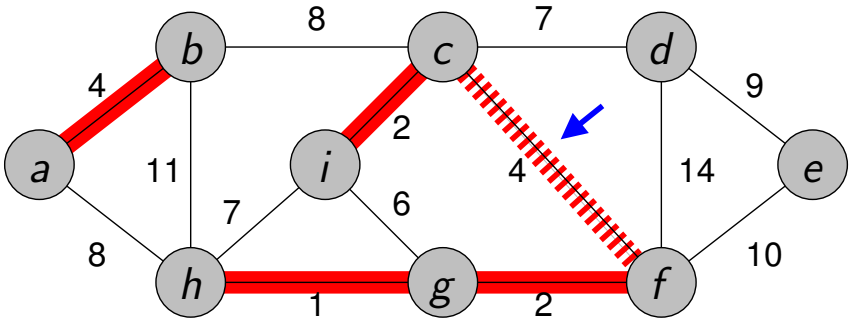
Beispiel Kruskal (Forts.)



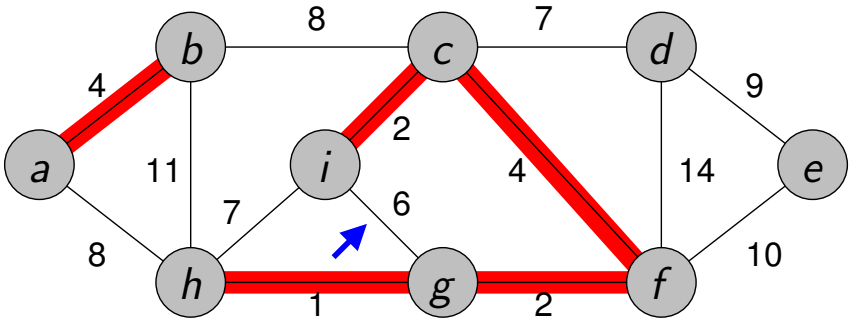
Beispiel Kruskal (Forts.)



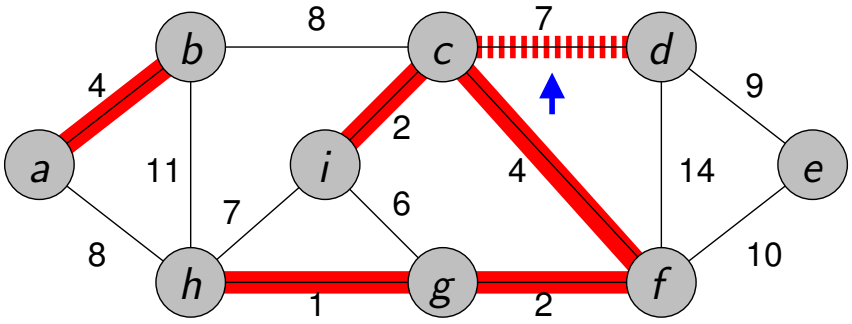
Beispiel Kruskal (Forts.)



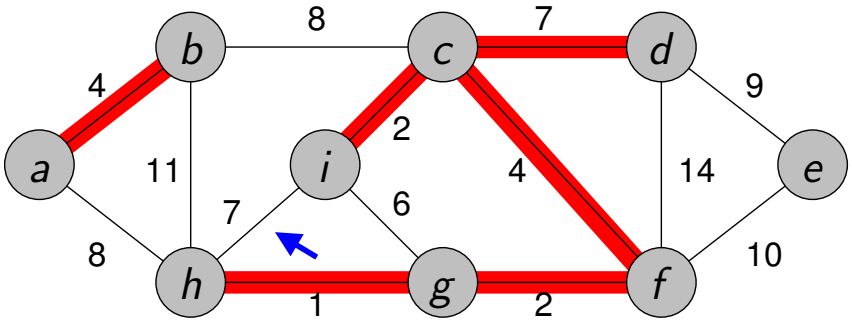
Beispiel Kruskal (Forts.)



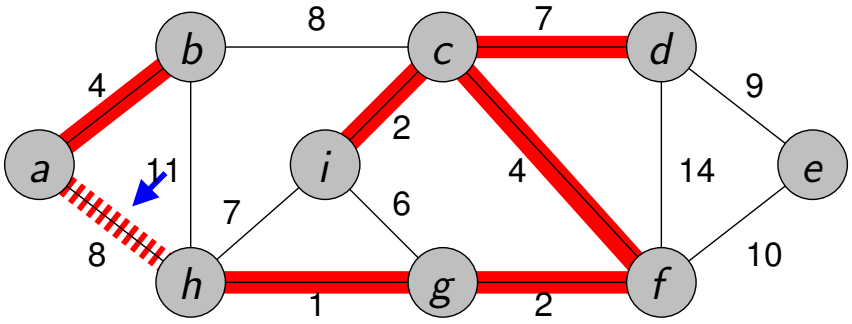
Beispiel Kruskal (Forts.)



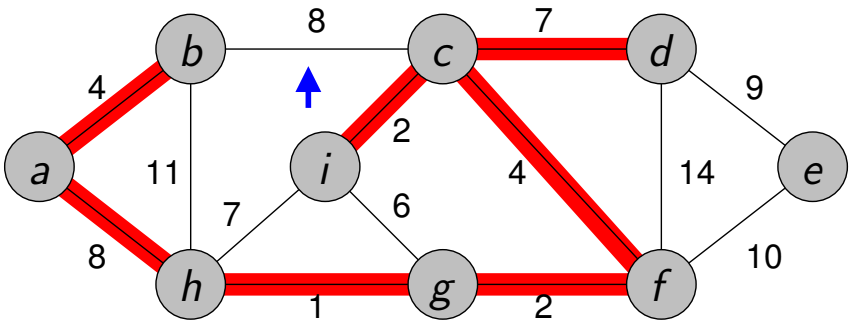
Beispiel Kruskal (Forts.)



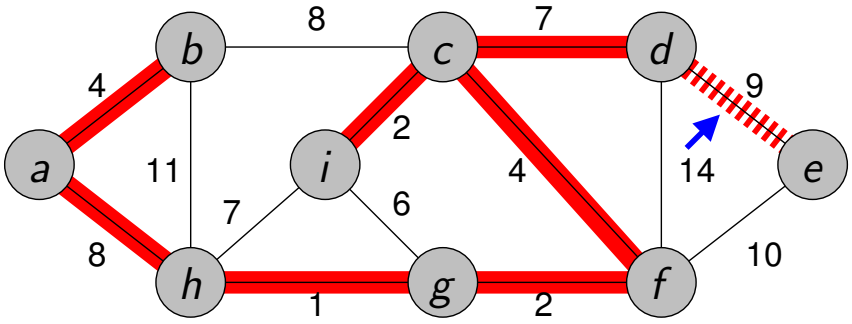
Beispiel Kruskal (Forts.)



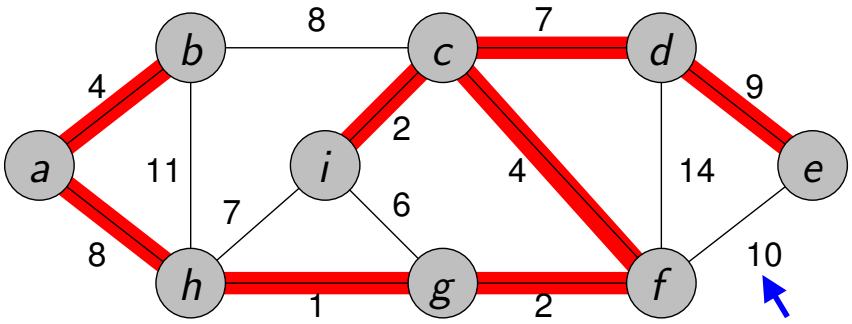
Beispiel Kruskal (Forts.)



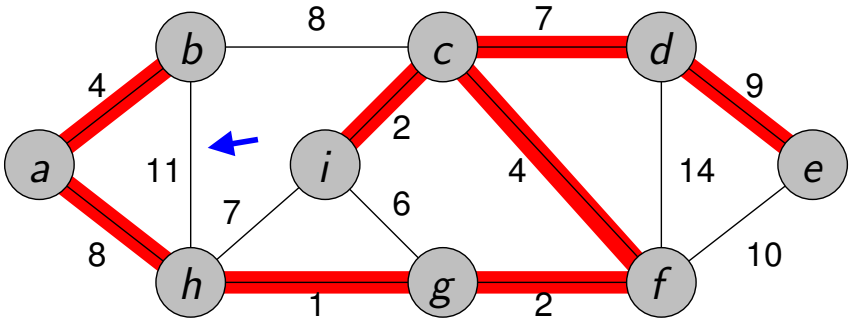
Beispiel Kruskal (Forts.)



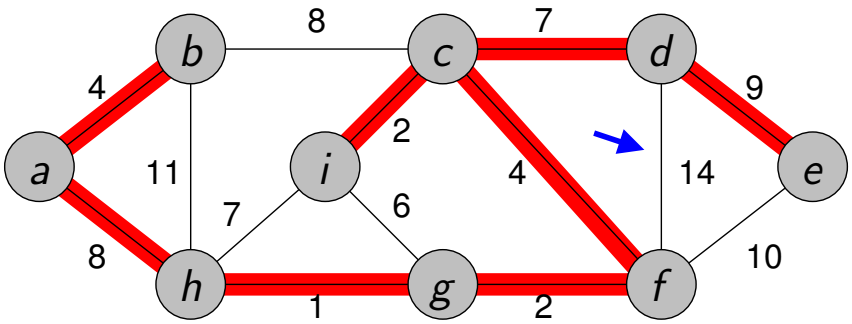
Beispiel Kruskal (Forts.)



Beispiel Kruskal (Forts.)



Beispiel Kruskal (Forts.)



Algorithmus von Prim

- Berechnung eines minimalen Spannbaums durch Erweiterung eines Teilbaums ausgehend vom Startknoten r
- Ein Min-Priority Queue enthält alle Knoten, die *nicht* im Teilbaum enthalten sind
- Knoteninformationen:
  - ▷ $key[v] \rightsquigarrow$ Wert einer minimalen Kante vom Teilgraph zum Knoten v
  - ▷ $\pi[v] \rightsquigarrow$ Endknoten der minimalen Kante $(v, \pi[v])$
- Die Kantenmenge des minimalen Spannbaums ist

$$A = \{(v, \pi[v]) \mid v \in V \setminus \{r\}\}$$

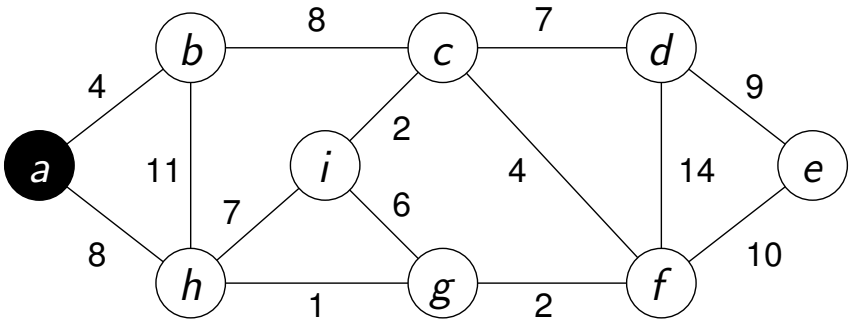
- Laufzeit: $O(\|E\| \log_2 \|V\|)$

Algorithmus MSTPrim(G, w, r)

MSTPrim(G, w, s)
Input: Graph $G = (V, E)$, Gewichtsfunktion $w : E \mapsto \mathbb{R}$,
Startknoten $s \in V$

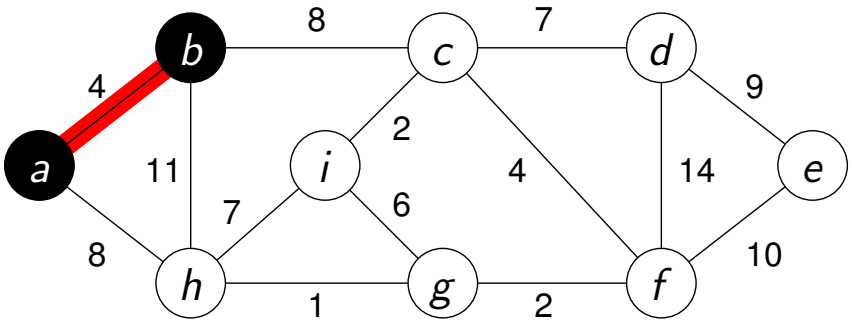
```
1  for jeden Knoten u ∈ V do
2     key[u] := ∞
3     π[u] := NIL
4  key[s] := 0
5  Füge alle Knoten in V in die Priority Queue Q ein
6  while Q ist nicht leer do
7     u := ExtractMin(Q)
8     for jeden Knoten v ∈ Adj[u] do
9        if v ∈ Q und w(u, v) < key[v] then
10          π[v] := u
11          DecreaseKey(Q, v, w(u, v))
```

Beispiel Prim



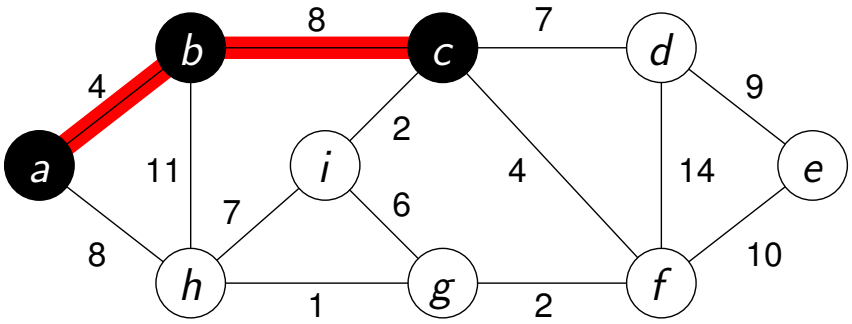
v	a	b	c	d	e	f	g	h	i
$key[v]$	0	4	∞	∞	∞	∞	∞	8	∞
$\pi[v]$	NIL	a	NIL	NIL	NIL	NIL	NIL	a	NIL

Beispiel Prim (Forts.)



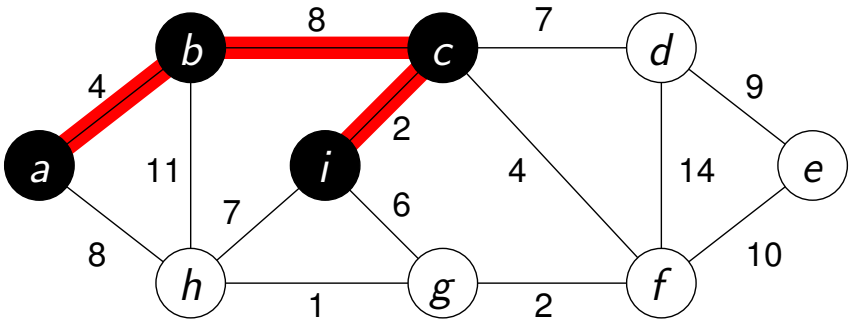
v	a	b	c	d	e	f	g	h	i
$key[v]$	0	4	8	∞	∞	∞	∞	8	∞
$\pi[v]$	NIL	a	b	NIL	NIL	NIL	NIL	a	NIL

Beispiel Prim (Forts.)



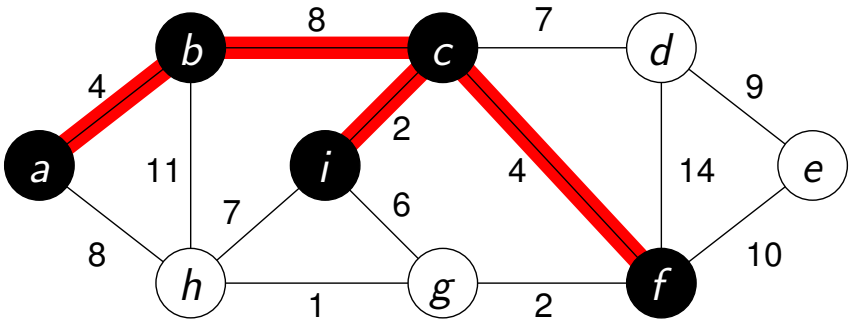
v	a	b	c	d	e	f	g	h	i
$key[v]$	0	4	8	7	∞	4	∞	8	2
$\pi[v]$	NIL	a	b	c	NIL	c	NIL	a	c

Beispiel Prim (Forts.)



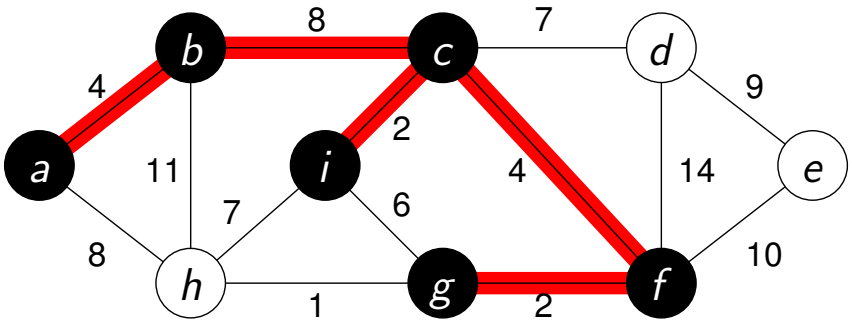
v	a	b	c	d	e	f	g	h	i
$key[v]$	0	4	8	7	∞	4	6	7	2
$\pi[v]$	NIL	a	b	c	NIL	c	i	i	c

Beispiel Prim (Forts.)



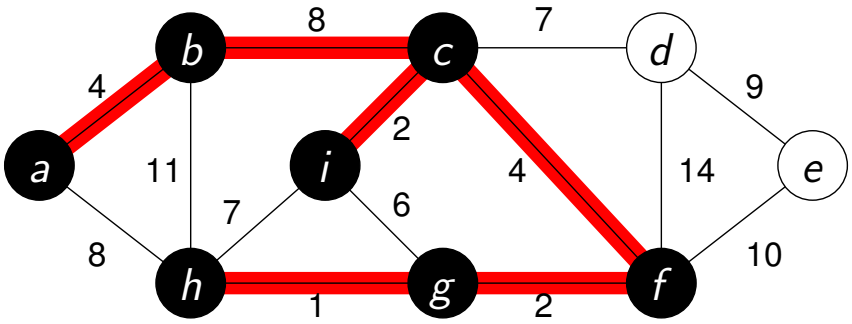
v	a	b	c	d	e	f	g	h	i
$key[v]$	0	4	8	7	10	4	2	7	2
$\pi[v]$	NIL	a	b	c	f	c	f	i	c

Beispiel Prim (Forts.)



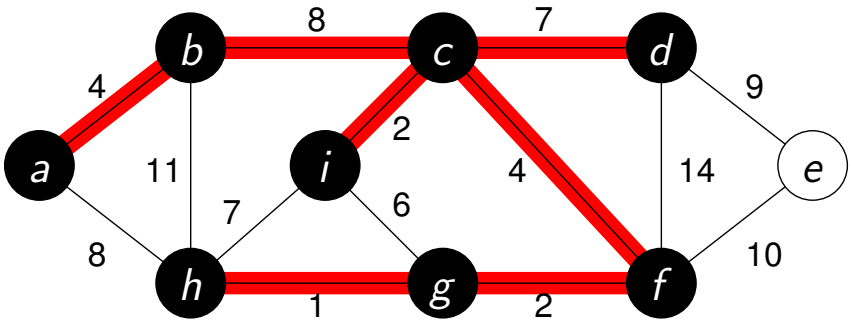
v	a	b	c	d	e	f	g	h	i
$key[v]$	0	4	8	7	10	4	2	1	2
$\pi[v]$	NIL	a	b	c	f	c	f	g	c

Beispiel Prim (Forts.)



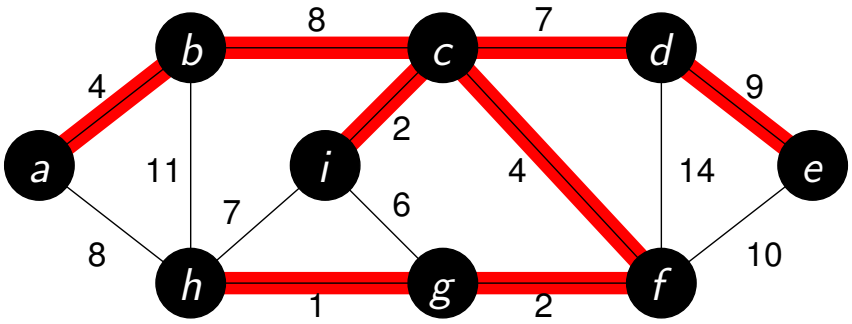
v	a	b	c	d	e	f	g	h	i
$key[v]$	0	4	8	7	10	4	2	1	2
$\pi[v]$	NIL	a	b	c	f	c	f	g	c

Beispiel Prim (Forts.)



v	a	b	c	d	e	f	g	h	i
$key[v]$	0	4	8	7	9	4	2	1	2
$\pi[v]$	NIL	a	b	c	d	c	f	g	c

Beispiel Prim (Forts.)



v	a	b	c	d	e	f	g	h	i
$key[v]$	0	4	8	7	9	4	2	1	2
$\pi[v]$	NIL	a	b	c	d	c	f	g	c

Zusammenfassung

- Generischer MST-Algorithmus auf Basis von Schnitten in Graphen
- Implementierung des generischen Algorithmus:
  - Algorithmus von Kruskal
  - Algorithmus von Prim
- Voraussetzung: effiziente Datenstrukturen
  - Mengen ($\rightsquigarrow$ Kruskal)
  - Priority Queue ($\rightsquigarrow$ Prim)