Algorithmen und Datenstrukturen 2

Lerneinheit 4: Dynamisches Programmieren

Prof. Dr. Christoph Karg

Studiengang Informatik
Hochschule Aalen

Sommersemester 2016

Einleitung

Diese Lerneinheit widmet sich einer weiteren Programmiertechnik zur Bearbeitung von Optimierungsproblemen, dem Dynamischen Programmieren.

Es werden folgende Fragen behandelt:

- Was ist die Idee hinter dynamischem Programmieren?
- Welche Voraussetzungen sind für dynamisches Programmieren notwendig?
- Was gibt es bei der Implementierung zu beachten?

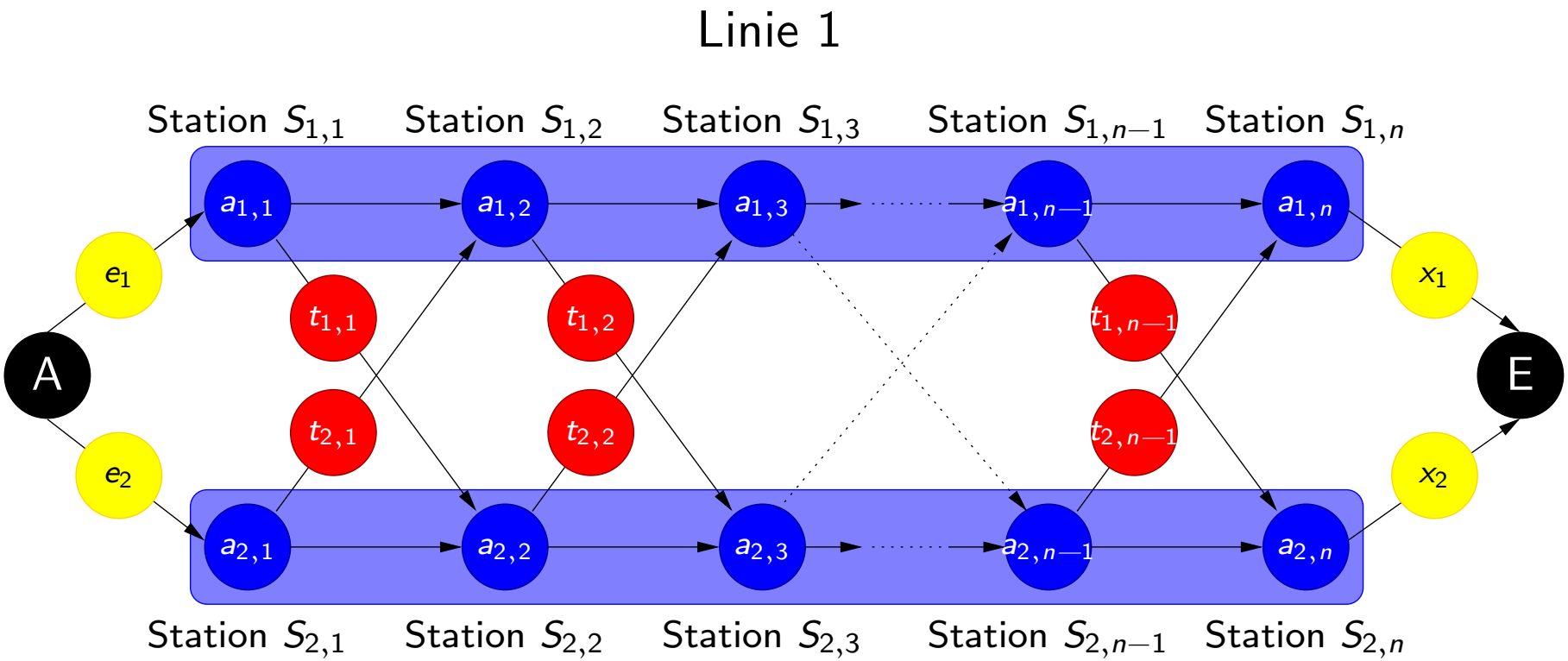
Dynamisches Programmieren

Der Begriff „Programmierung“ steht für die schrittweise Berechnung einer Tabelle

Schritte zur Entwicklung eines Algorithmus:

1. Charakterisierung der Struktur einer optimalen Lösung
2. Berechnung des Werts einer optimalen Lösung
   - ▷ Top Down $\rightsquigarrow$ rekursiver Algorithmus
   - ▷ Bottom Up $\rightsquigarrow$ iterativer Algorithmus
3. Erweiterung des Algorithmus zur Konstruktion einer optimalen Lösung

Fertigungsplanung



Aufgabe: Finde schnellste Produktionsroute

Fertigungsplanung (Forts.)

- Zur Herstellung eines Produkts sind n Arbeitsschritte notwendig
- Die Arbeitsschritte müssen sequentiell durchlaufen werden
- Zwei Fertigungslinien mit jeweils n Stationen stehen bereit:

  Linie 1: $S_{1,1}, S_{1,2}, \ldots, S_{1,n}$
  Linie 2: $S_{2,1}, S_{2,2}, \ldots, S_{2,n}$

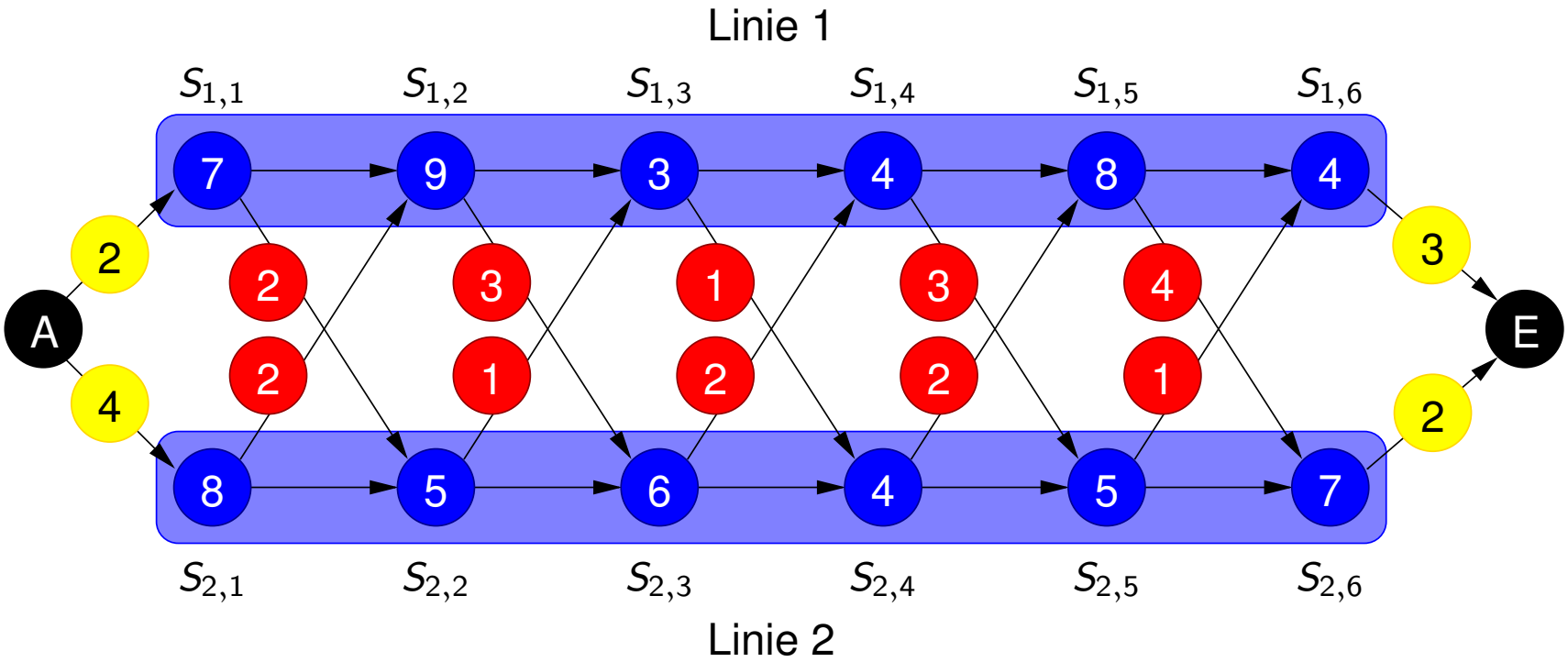
- In der Regel durchläuft ein Produkt während der Herstellung eine der beiden Linien
- Für Expressbestellungen kann während der Produktion die Linie gewechselt werden

Fertigungsplanung (Forts.)

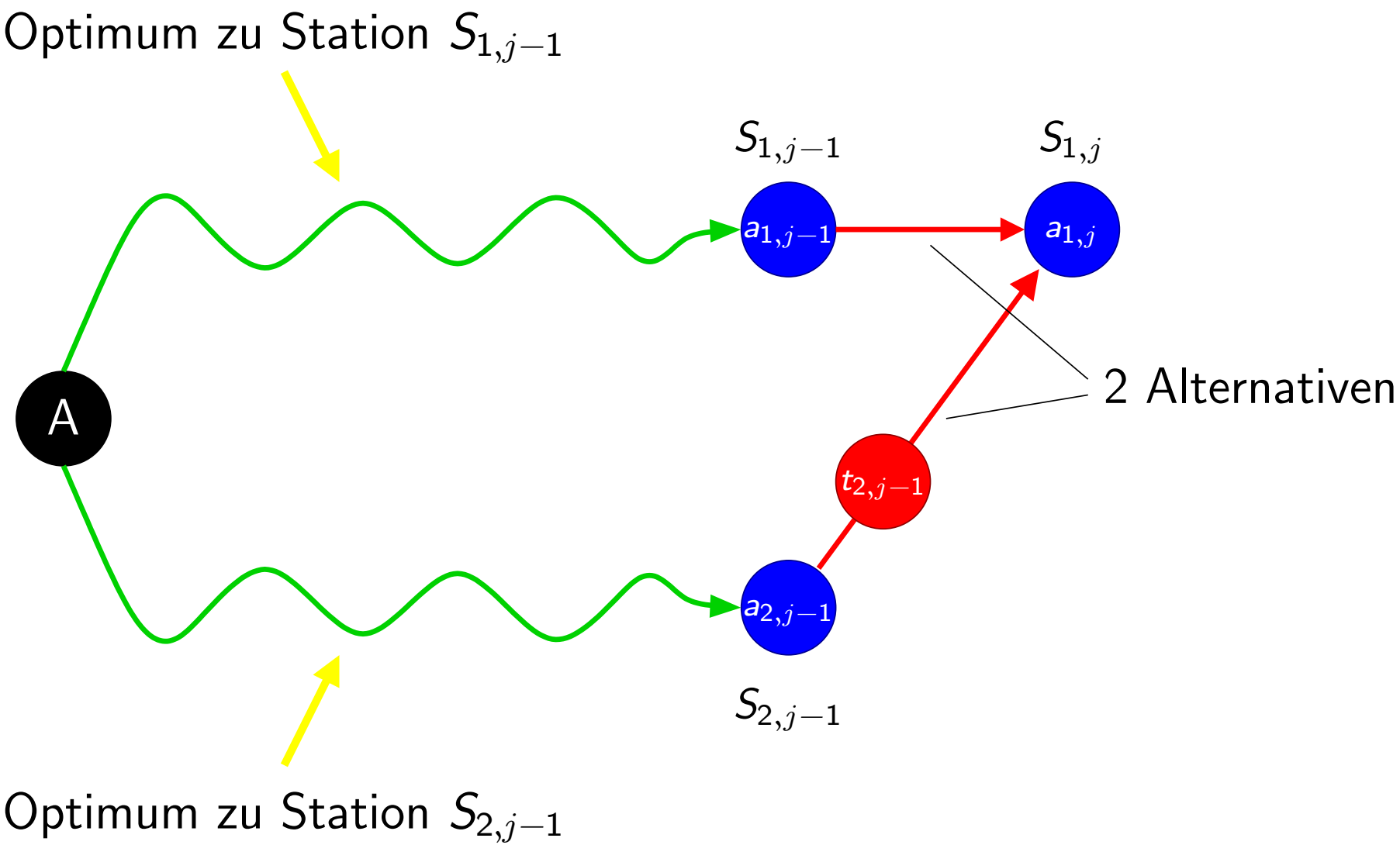
- Fertigungszeiten für Linie $i = 1, 2$:
  - ▷ Bereitstellungszeit e_i: Rohling betritt die Linie
  - ▷ Bearbeitungszeit $a_{i,j}$ in Station j, $j = 1, \ldots, n$: Dauer des j-ten Fertigungsschritts in Linie i
  - ▷ Beendigungszeit x_i: fertiges Produkt verläßt die Linie

  Die Dauer des Transports von Station j zu Station $j + 1$ innerhalb derselben Linie ist vernachlässigbar
- Wechsel der Produktionslinien
  - ▷ $t_{1,j}$: Dauer des Wechsels von $S_{1,j}$ nach $S_{2,j+1}$
  - ▷ $t_{2,j}$: Dauer des Wechsels von $S_{2,j}$ nach $S_{1,j+1}$
- Aufgabe: Optimierung der Produktionszeit für Expressbestellungen

Fertigungsplanung (Beispiel)



Idee zur Berechnung des Optimums



Rekursiver Ansatz

- Ziel: Rekursive Definition einer optimalen Lösung f^*
- $f_i[j]$ bezeichnet die Zeit um auf schnellsten Weg vom Produktionsbeginn zum Ende von Station $S_{i,j}$ zu gelangen
- Die Produktion beginnt bei Station $S_{1,1}$ oder $S_{2,1}$:

$$\begin{aligned} f_1[1] &= e_1 + a_{1,1} \\ f_2[1] &= e_2 + a_{2,1} \end{aligned}$$

- Ein Produkt muss alle n Stationen von Linie 1 oder 2 durchlaufen:

$$f^* = \min\{f_1[n] + x_1, f_2[n] + x_2\}$$

Rekursiver Ansatz (Forts.)

Zwei Alternativen für den schnellsten Weg zu Station $S_{1,j}$ wobei $j = 2, 3, \ldots, n$:

- Direkter Weg von $S_{1,j-1}$:

$$v_1 = f_1[j-1] + a_{1,j}$$

- Transfer von Station $S_{2,j-1}$ der Linie 2 auf Linie 1:

$$v_2 = f_2[j-1] + t_{2,j-1} + a_{1,j}$$

Der schnellste Weg verursacht minimale Kosten:

$$f_1[j] = \min\{v_1, v_2\}$$

Analoge Berechnung für $f_2[j]$

Rekursiver Ansatz (Forts.)

Rekursionsgleichung zur Berechnung von $f_1[j]$:

$$f_1[j] = \begin{cases} e_1 + a_{1,1} & j = 1 \\ \min\{f_1[j-1] + a_{1,j}, f_2[j-1] + t_{2,j-1} + a_{1,j}\} & j \geq 2 \end{cases}$$

Rekursionsgleichung zur Berechnung von $f_2[j]$:

$$f_2[j] = \begin{cases} e_2 + a_{2,1} & j = 1 \\ \min\{f_2[j-1] + a_{2,j}, f_1[j-1] + t_{1,j-1} + a_{2,j}\} & j \geq 2 \end{cases}$$

Korrektheit des Verfahrens

Satz: Für alle $i \in \{1, 2\}$ und alle $j \in \{1, \ldots, n\}$ ist $f_i[j]$ die kürzeste Produktionszeit bis zu Station $S_{i,j}$.

Beweis. Induktion über n.

$j = 1$: Da die Werte $f_1[1] = e_1 + a_{1,1}$ und $f_2[1] = e_+ a_{2,1}$ die einzig möglichen sind, sind sie optimal.

$j - 1 \rightsquigarrow j$: Sei $i = 1$ und w die minimale Produktionszeit bis zu Station $S_{i,j}$. Betrachte den durch die Rekursion berechneten Wert $f_1[j]$.

$w \leq f_1[j]$: ✓

Korrektheit des Verfahrens (Forts.)

$w \geq f_1[j]$: Angenommen, die optimale Produktionsroute zu $S_{1,j}$ führt über $S_{1,j-1}$.

Da laut Annahme $f_1[j-1]$ und $f_2[j-1]$ optimal sind, gilt:

$$w \geq f_1[j-1] + a_{1,j} \geq f_1[j]$$

Führt der optimale Weg über $S_{2,j-1}$, dann gilt:

$$w \geq f_2[j-1] + t_{2,j-1} + a_{1,j} \geq f_1[j]$$

Insgesamt: $w = f_1[j]$. Der rekursiv berechnete Wert ist also optimal.

Analog: $i = 2$

Erweiterung: Berechnung des besten Weges

- $\ell_i[j]$ bezeichnet die Nummer der Produktionslinie deren Station $S_{\ell_i[j],j-1}$ auf dem schnellsten Weg zu $S_{i,j}$ liegt
- ℓ^* bezeichnet die Linie, deren n-te Station auf dem schnellsten Produktionsweg liegt
- Die Werte $\ell_i[j]$ für $i = 1, 2$ und $j = 2, 3, \ldots, n$ sind ein Nebenprodukt der Berechnung obiger Rekursionsgleichungen
- Beachte: $\ell_i[1]$ ist nicht definiert

Rekursiver Algorithmus

$\textsc{RecF}(i, j, e, a, t)$

Output: $f_i[j]$

1 **if** $i = 1$ **then**
2 **if** $j = 1$ **then**
3 **return** $e_1 + a_{1,1}$
4 **else**
5 $v_1 := \textsc{RecF}(1, j-1, e, a, t) + a_{1,j}$
6 $v_2 := \textsc{RecF}(2, j-1, e, a, t) + t_{2,j-1} + a_{1,j}$

Rekursiver Algorithmus

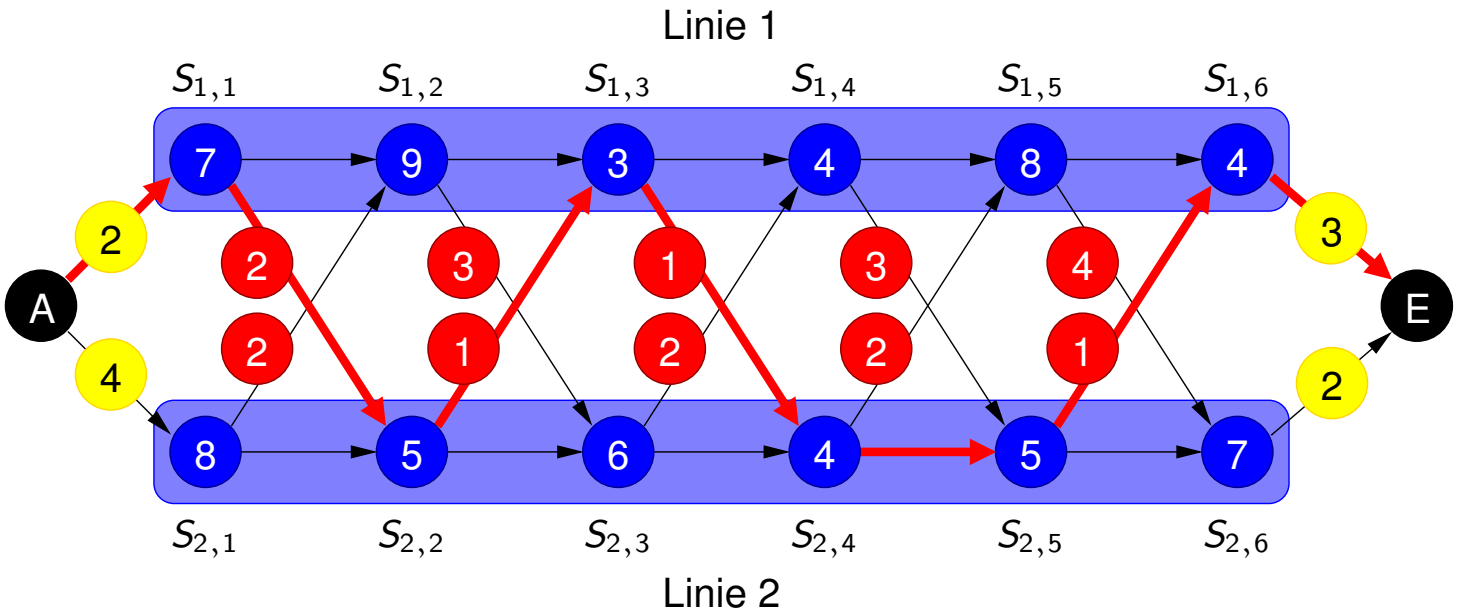
```
7        if v_1 ≤ v_2 then
8            ℓ_1[j] := 1
9            return v_1
10       else
11           ℓ_1[j] := 2
12           return v_2
13   else
14       Analog für i = 2
```

Ergebnis:

$$f^* = \min\{\textsc{RecF}(1, n, e, a, t) + x_1, \textsc{RecF}(2, n, e, a, t) + x_2\}$$

Die optimale Route wird intern im Array ℓ gespeichert.

Beispiel



j	1	2	3	4	5	6
$f_1[j]$	9	18	20	24	32	35
$f_2[j]$	12	16	22	25	30	37

j	2	3	4	5	6
$\ell_1[j]$	1	2	1	1	2
$\ell_2[j]$	1	2	1	2	2

Ergebnis: $f^* = 38,\ \ell^* = 1$

Laufzeit des rekursiven Algorithmus

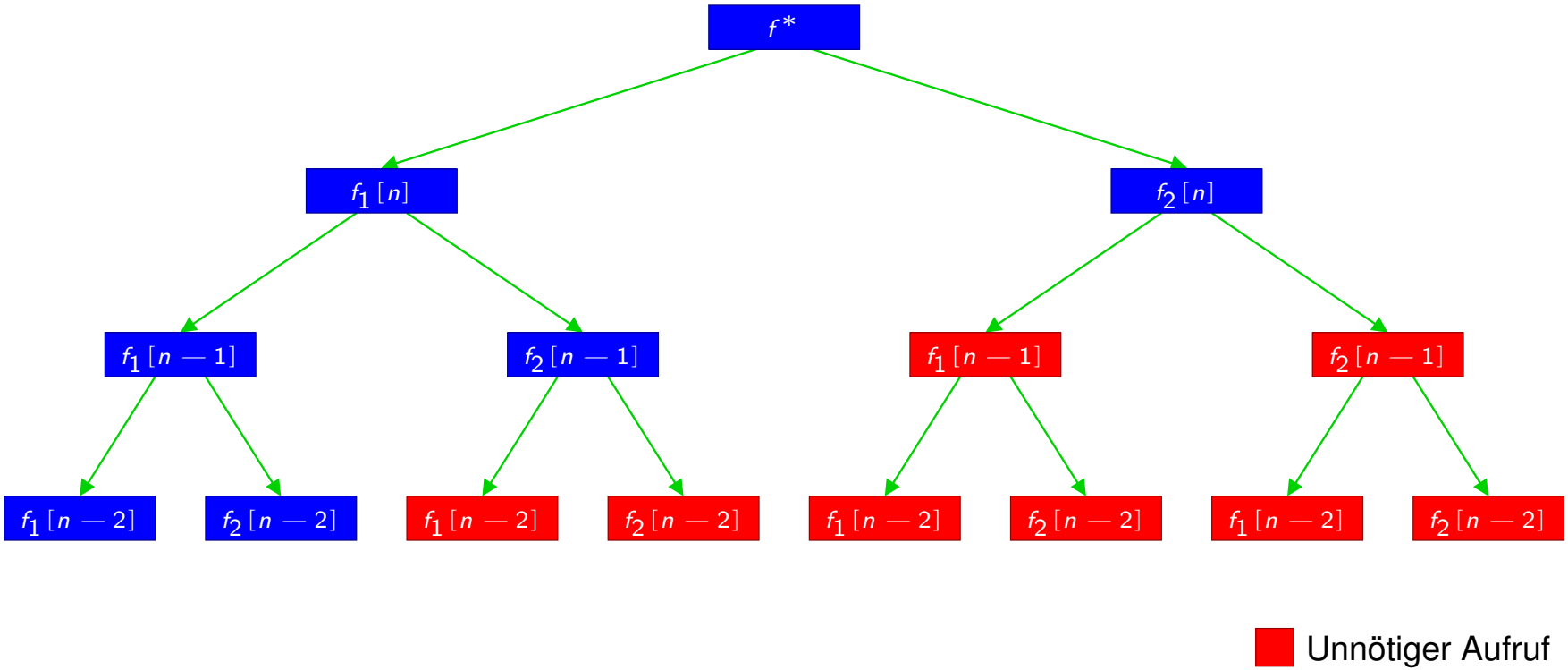
Laufzeit: Für die Anzahl $T(n)$ der rekursiven Aufrufe von $\textsc{RecF}(i, n, e, a, t)$ gilt:

$$T(n) = \begin{cases} 1 & n = 1 \\ 2 \cdot T(n-1) & n \geq 2 \end{cases}$$

Somit: Laufzeit von $\textsc{RecF}(i, n, e, a, t)$ ist $\Theta(2^n)$

Fazit: rekursiver Algorithmus unbrauchbar

Grund für die Ineffizienz



Problem: Die meisten rekursiven Aufrufe sind unnötig

Lösung: Speichere bereits berechnete Werte in einer Tabelle ($\rightsquigarrow$ Memoization)

Modifizierter Algorithmus

$\textsc{MemoRecF}(i, j, e, a, t)$

Output: $f_i[j]$

```
1 if f_i[j] < ∞ then
2    return f_i[j]
3 else
4    if i = 1 then
5       if j = 1 then
6          return e_1 + a_{1,1}
7       else
8          v_1 := MemoRecF(1, j − 1, e, a, t) + a_{1,j}
9          v_2 := MemoRecF(2, j − 1, e, a, t) + t_{2,j−1} + a_{1,j}
```

Rekursiver Algorithmus

```
10        if v_1 ≤ v_2 then
11            f_1[j] := v_1
12            ℓ_1[i] := 1
13            return v_1
14        else
15            f_1[j] := v_2
16            ℓ_1[i] := 2
17            return v_2
18    else
19        Analog für i = 2
```

Laufzeit: $O(n)$, da die Anzahl der rekursiven Aufrufe gleich $2n$ ist

Optimale Teilstruktur

- Optimale Teilstruktur Eigenschaft:
  Jede optimale Lösung eines Problems enthält optimale Lösungen für die im Problem enthaltenen Teilprobleme
- Das Problem Fertigungsplanung besitzt diese Eigenschaft, denn der schnellste Weg zu $S_{1,j}$ ist entweder
  - der schnellste Weg zu $S_{1,j-1}$ und direkt weiter zu $S_{1,j}$, oder
  - der schnellste Weg zu $S_{2,j-1}$ und ein Wechsel von Linie 2 zu Linie 1, also zu $S_{1,j}$

  Analog für $S_{2,j}$
- Die Optimale Teilstruktur Eigenschaft ermöglicht eine effiziente Berechnung einer optimalen Lösung.

Iterativer Algorithmus

$\textsc{IterativeF}(n, e, a, t, x)$

```
1 f_1[1] := e_1 + a_{1,1}
2 f_2[1] := e_2 + a_{2,1}
3 for j := 2 to n do
4    if f_1[j-1] + a_{1,j} ≤ f_2[j-1] + t_{2,j-1} + a_{1,j} then
5       f_1[j] := f_1[j-1] + a_{1,j}
6       ℓ_1[j] := 1
7    else
8       f_1[j] := f_2[j-1] + t_{2,j-1} + a_{1,j}
9       ℓ_1[j] := 2
```

Iterativer Algorithmus (Forts.)

10 **if** $f_2[j-1] + a_{2,j} \leq f_1[j-1] + t_{1,j-1} + a_{2,j}$ **then**
11 $f_2[j] := f_2[j-1] + a_{2,j}$
12 $\ell_2[j] := 2$
13 **else**
14 $f_2[j] := f_1[j-1] + t_{1,j-1} + a_{2,j}$
15 $\ell_1[j] := 1$
16 **if** $f_1[n] + x_1 \leq f_2[n] + x_2$ **then**
17 $f^* := f_1[n] + x_1$
18 $\ell^* := 1$
19 **else**
20 $f^* := f_2[n] + x_2$
21 $\ell^* := 2$

Bemerkungen zu IterativeF

- IterativeF() berechnet die Tabellen f und ℓ in Bottom Up Manier
- In der for-Schleife in Zeilen 3–15 werden die Tabellen schrittweise unter Verwendung der Rekursionsgleichungen berechnet
- Die if-Anweisung in Zeilen 16–21 dient zur Berechnung der optimalen Werts
- Die Laufzeit von IterativeF() ist $\Theta(n)$, also linear in der Anzahl der Stationen einer Produktionslinie

Ausgabe des schnellsten Pfads

Nach Aufruf von IterativeF() enthält die ℓ-Tabelle alle Informationen um den schnellen Produktionspfad auszugeben.

PrintStations(ℓ, n)

```
1 for j := 2 to n do
2     i := ℓ_i[j]
3     print"Linie " i ", Station " j − 1
4 i := ℓ*
5 print"Linie " i ", Station " n
```

Matrizenmultiplikation

- Eine $n \times m$ Matrix A ist eine Tabelle mit m Zeilen und n Spalten:

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,m-1} & a_{1,m} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,m-1} & a_{2,m} \\ \vdots & & & & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,m-1} & a_{n,m} \end{pmatrix}$$

- Zwei Matrizen A und B kann man multiplizieren, falls die Anzahl der Spalten von A gleich der Anzahl der Zeilen von B ist

Matrizenmultiplikation (Forts.)

- Ist A eine $n \times m$ Matrix und B eine $m \times \ell$ Matrix, dann ist das Produkt $C = A \cdot B$ eine $n \times \ell$, wobei

$$c_{i,j} = \sum_{k=1}^{m} a_{i,k} \cdot b_{k,j}$$

  für $i = 1, 2, \ldots, n$ und $j = 1, 2, \ldots, \ell$
- Falls man A und B multiplizieren kann, dann nennt man A und B (multiplikations-) kompatibel

Algorithmus MatrixMultiply(A, B)

MatrixMultiply(A, B)
Input: Matrizen A und B
Output: Matrix $C = A \cdot B$, falls Produkt berechenbar

```
1 if columns(A) ≠ rows(B) then
2   print "Dimensionen nicht kompatibel"
3 else
4   for i := 1 to rows(A) do
5     for j := 1 to columns(B) do
6       C[i, j] := 0
7       for k := 1 to columns(A) do
8         C[i, j] := C[i,j] + A[i, k] · B[k, j]
9   return C
```

Laufzeit: $O(rows(A) \cdot columns(B) \cdot columns(A))$

Assoziativität der Matrixmultiplikation

- Gegeben: Matrizen $A_1, A_2, \ldots, A_n$, wobei A_i und A_{i+1} für alle $i = 1, 2, \ldots, n-1$ kompatibel sind
- Zur Berechnung von $C = A_1 \cdot A_2 \cdot \ldots \cdot A_n$ müssen $n-1$ Matrixmultiplikationen durchgeführt werden
- Da die Matrixmultiplation assoziativ ist, ist die Reihenfolge der Multiplikationen (aus mathematischer Sicht) irrelevant
- Die Reihenfolge beeinflusst jedoch den Aufwand zur Berechnung der Multiplikationen

Kettenmultiplikation von Matrizen

Matrizen-Kettenmultiplikation steht für das folgende Optimierungsproblem:

- Gegeben: Eine Folge (Kette) von Matrizen $\langle A_1, A_2, \ldots, A_n \rangle$, wobei A_i die Dimension $p_{i-1} \times p_i$ hat
- Aufgabe: Berechne das Produkt $A_1 \cdot A_2 \cdot \ldots \cdot A_n$ mit minimalem Aufwand

Beispiel: Betrachte die Matrizen A_1, A_2 und A_3 mit Dimension 10×100, 100×5 und 5×50

- $(A_1 \cdot (A_2 \cdot A_3)) \rightsquigarrow$ 75000 Multiplikationen
- $((A_1 \cdot A_2) \cdot A_3) \rightsquigarrow$ 7500 Multiplikationen

Anzahl verschiedener Klammerungen

- Frage: Auf wieviele verschiedene Arten kann n Matrizen klammern?
- Die Anzahl $P(n)$ der Klammerungen ist

$$P(n) = \begin{cases} 1 & n = 1 \\ \sum_{k=1}^{n-1} P(k) \cdot P(n-k) & n \geq 2 \end{cases}$$

- Es gilt: $P(n) = \Omega(2^n)$
- Fazit: Alle Klammerungen zu analysieren, um die Matrix Kettenmultiplikation optimal zu berechnen, ist nicht effizient.

Lösung mittels dynamischem Programmieren

Die optimale Klammerung kann mittels dynamischem Programmieren berechnet werden.

Vier Schritte:

1. Analyse der Struktur einer optimalen Klammerung
2. Rekursive Berechnung der Anzahl Skalarmultiplikationen der optimalen Klammerung
3. Berechnung der Anzahl Skalarmultiplikationen durch schrittweise Berechnung einer Tabelle
4. Berechnung der optimalen Klammerung

Schritt 1: Strukturanalyse

Betrachte eine optimale Klammerung für $A_i A_{i+1} \dots A_j$ wobei $1 \leq i < j \leq n$:

- Die Klammerung teilt das Produkt $A_i A_{i+1} \dots A_j$ in zwei Hälften $A_i A_{i+1} \dots A_k$ und $A_{k+1} \dots A_j$ wobei $i \leq k < j$
- Die Klammerung von $A_i A_{i+1} \dots A_k$ ist optimal. Andernfalls könnte man die optimale Klammerung für $A_i A_{i+1} \dots A_j$ verbessern
- Die Klammerung von $A_{k+1} \dots A_j$ ist ebenfalls optimal

Fazit: Matrix Kettenmultiplikation besitzt die Optimale Teilstruktur Eigenschaft

Schritt 2: Rekursive Berechnung des Optimums

- Definiere $A_{i..j} = A_i \cdot A_{i+1} \cdot \ldots \cdot A_j$ wobei $i \leq j$
- Sei $m[i,j]$ die minimale Anzahl Skalarmultiplikationen die zur Berechnung von $A_{i..j}$ notwendig sind
- Es gilt: $A_{i..j} = A_{i..k} \cdot A_{k+1..j}$ für $k = i, i+1, \ldots, j-1$
- Der Aufwand zur Berechnung von $A_{i..k} \cdot A_{k+1..j}$ ist

$$m[i,k] + m[k+1,j] + p_{i-1} p_k p_j$$

- Rekursive Berechnung von $m[i,j]$:

$$m[i,j] = \begin{cases} 0 & i = j \\ \min_{i \leq k < j} \{m[i,k] + m[k+1,j] + p_{i-1} p_k p_j\} & i < j \end{cases}$$

Schritt 3: Berechnung der Lösung

- In $s[i,j]$ wird die Stelle k gespeichert, an der $A_{i..j}$ zerlegt wird
- Die direkte Implementierung der Rekursionsgleichung ist ineffizient
- Zur Berechnung werden die Werte $m[i,j]$ für $1 \leq i \leq j \leq n$ benötigt
- Die Anzahl der m's ist $\binom{n}{2} + n = \Theta(n^2)$
- Die m's werden in einer Dreiecksmatrix gespeichert

Algorithmus MatrixChainOrder(p)

MatrixChainOrder(p)
Input: Dimensionsfolge $p = \langle p_0, p_1, \ldots, p_n \rangle$
Output: Tabelle m und s

```
1 n := length(p) − 1
2 for i := 1 to n do
3     m[i, i] := 0
4 for ℓ := 2 to n do
5     for i := 2 to n − ℓ + 1 do
6         j := i + ℓ − 1
7         m[i, j] := ∞
```

Algorithmus MatrixChainOrder(p)

```
8       for k := i to j − 1 do
9           q := m[i, k] + m[k + 1, j] + p_{i−1} p_k p_j
10          if q < m[i, j] then
11              m[i, j] := q
12              s[i, j] := k
13  return m und s
```

Laufzeit: $\Theta(n^3)$

Schritt 4: Berechnung der optimalen Klammerung

Die korrekte Klammerung wird anhand der Tabelle s berechnet:

```
PrintOptimalParens(s, i, j)
1 if i = j then
2    print "A[" i "]"
3 else
4    print "("
5    PrintOptimalParens(s, i, s[i, j])
6    PrintOptimalParens(s, s[i, j] + 1, j)
7    print ")"
```

Beispiel für Matrix Kettenmultiplikation

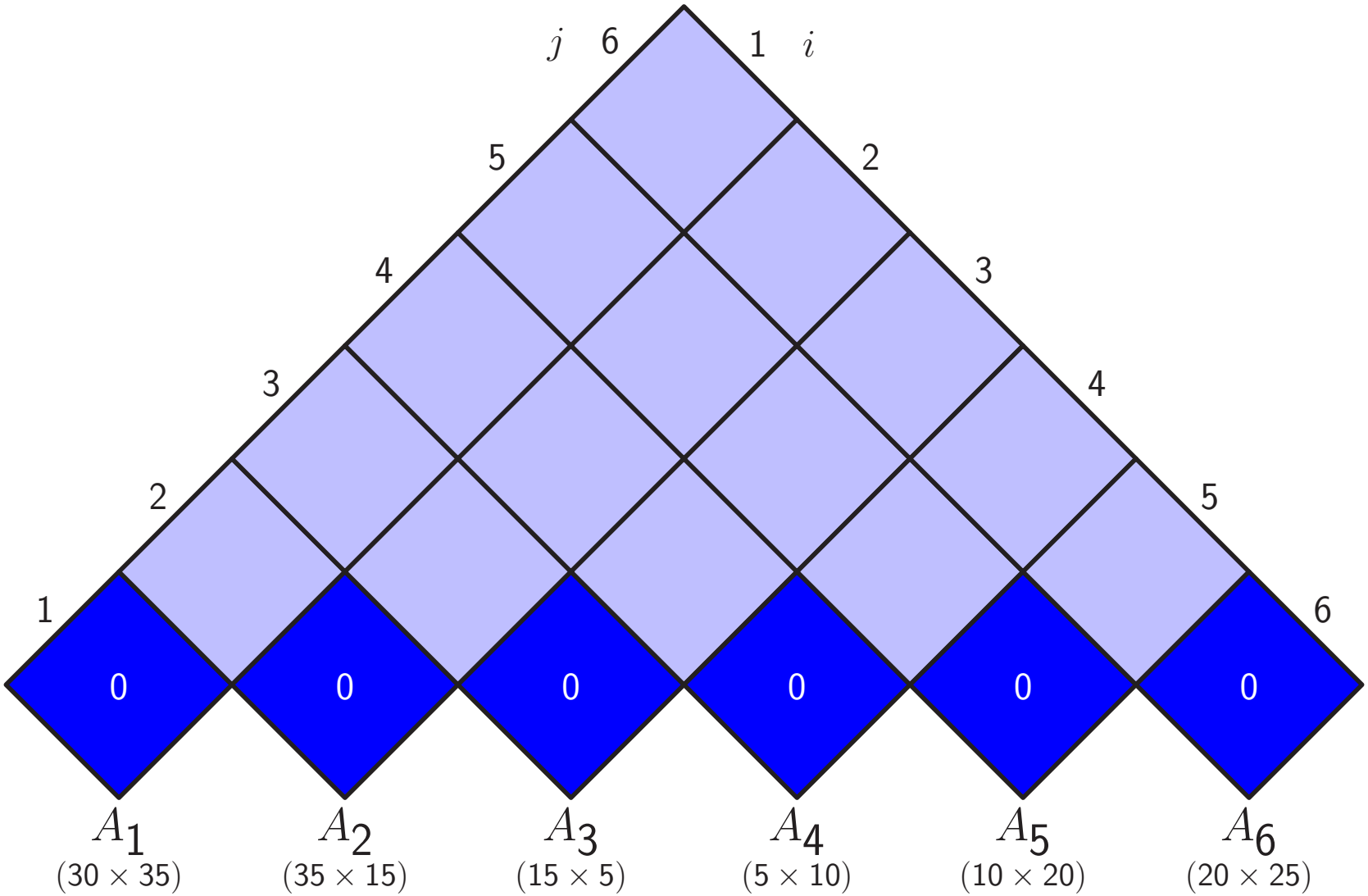
Gegeben sind die Matrizen $A_1, A_2, \ldots, A_6$ mit folgenden Dimensionen:

Matrix	Dimension
A_1	30×35
A_2	35×15
A_3	15×5
A_4	5×10
A_5	10×20
A_6	20×25

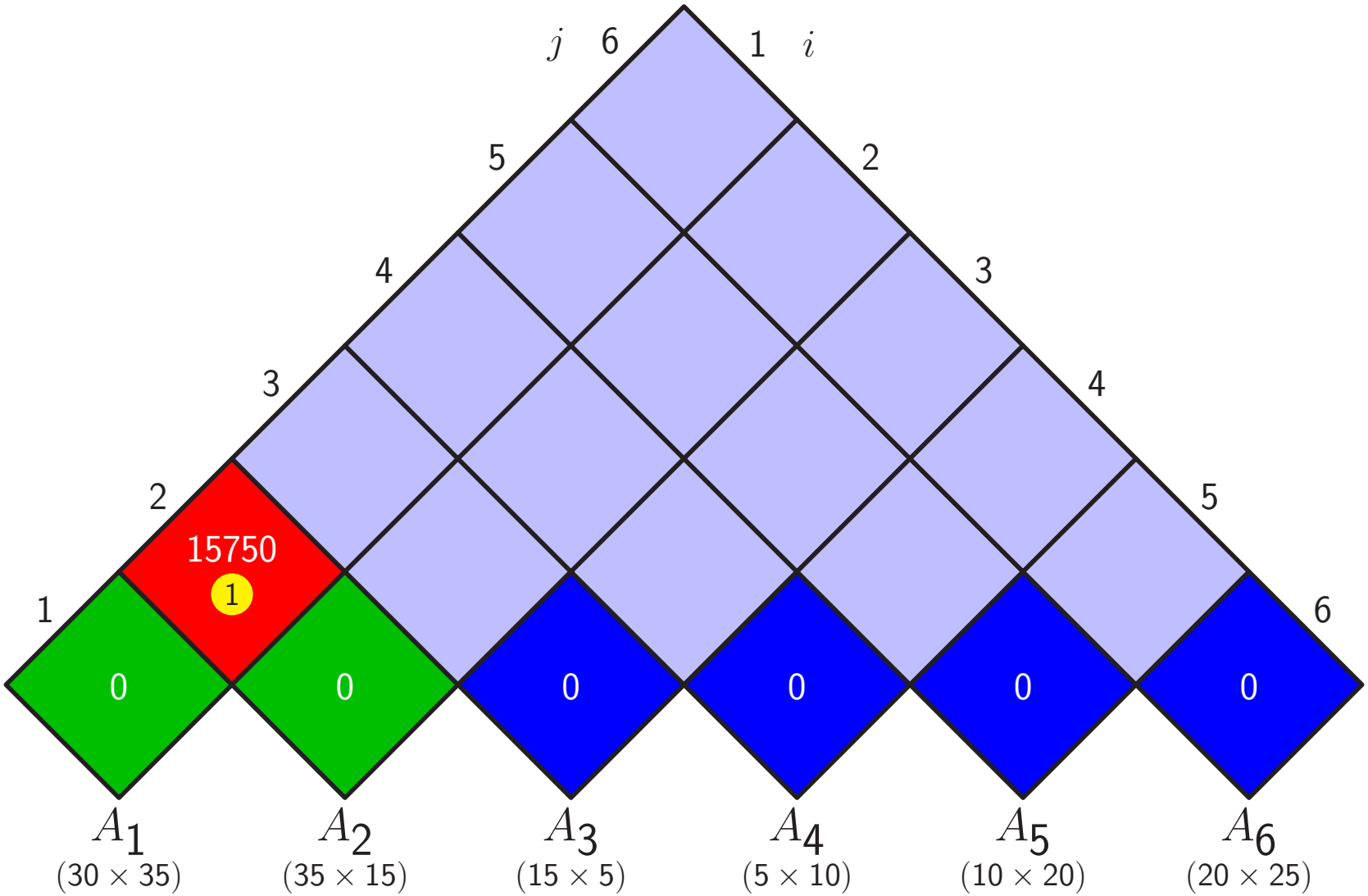
Eingabe für $\textsc{MatrixChainOrder}(p)$:

$$p = \langle 30, 35, 15, 5, 10, 20, 25 \rangle$$

Beispiel (Forts.)

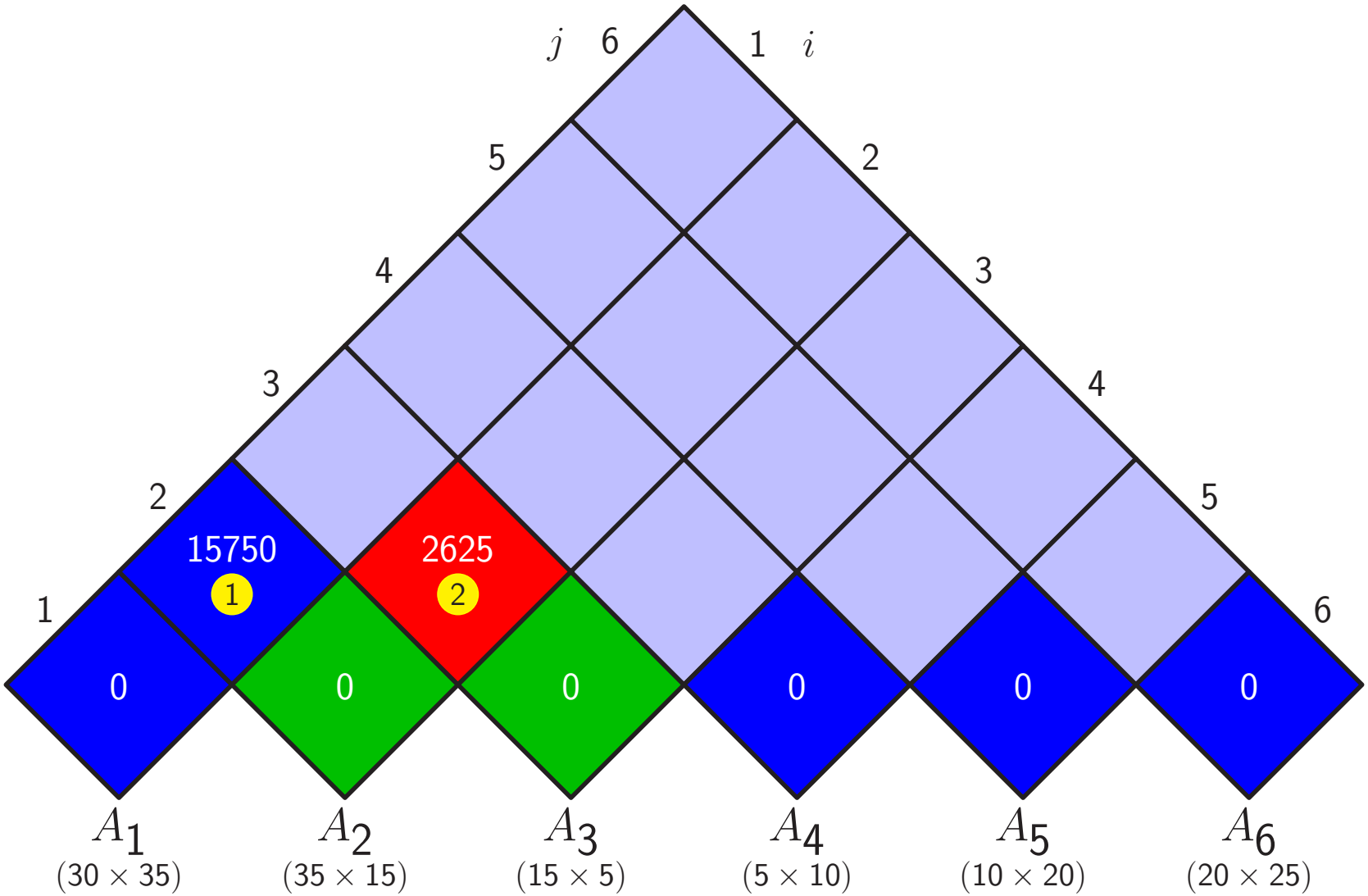


Beispiel (Forts.)



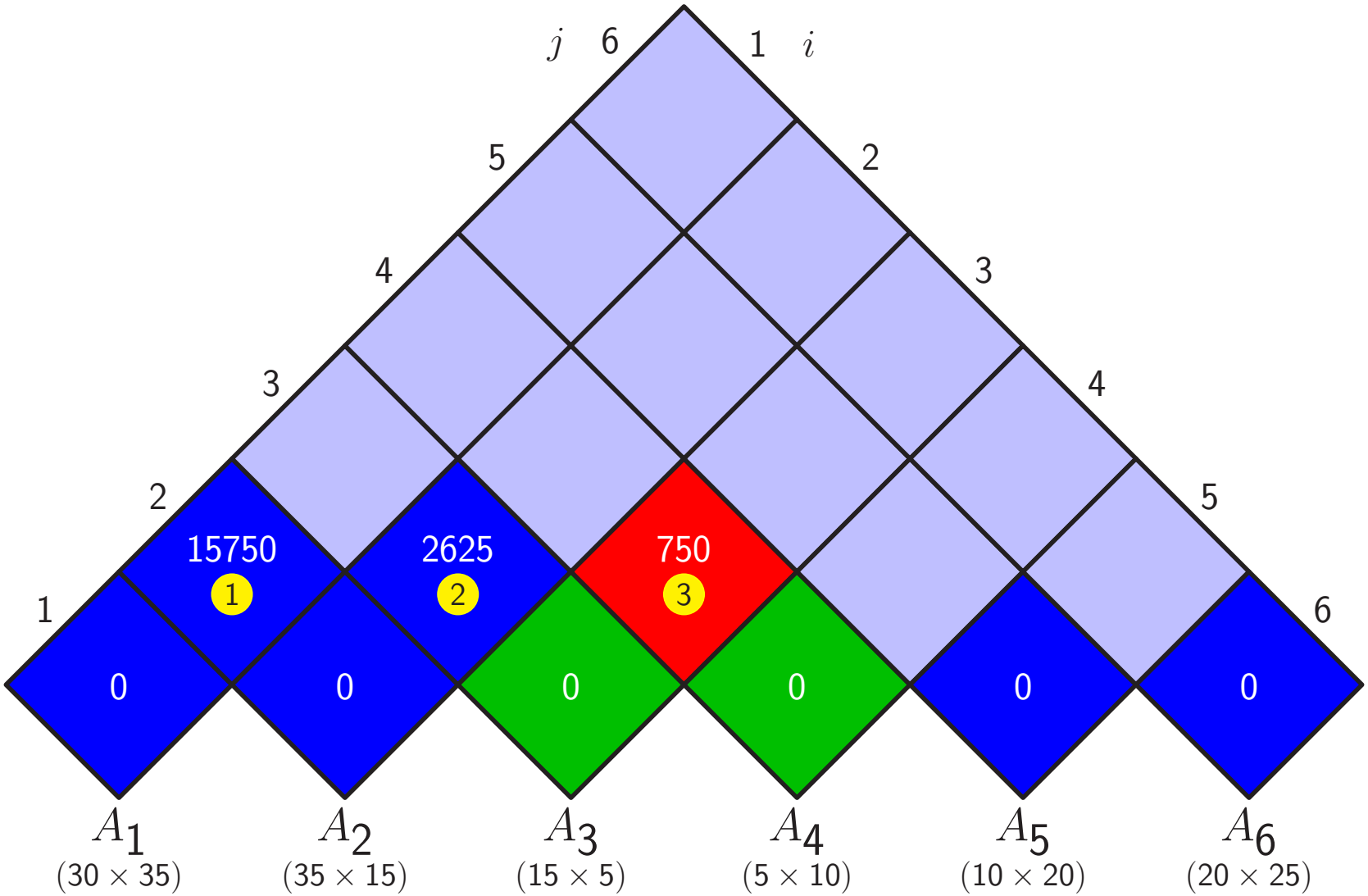
$$0 + 0 + 30 \cdot 35 \cdot 15 = 15750$$

Beispiel (Forts.)



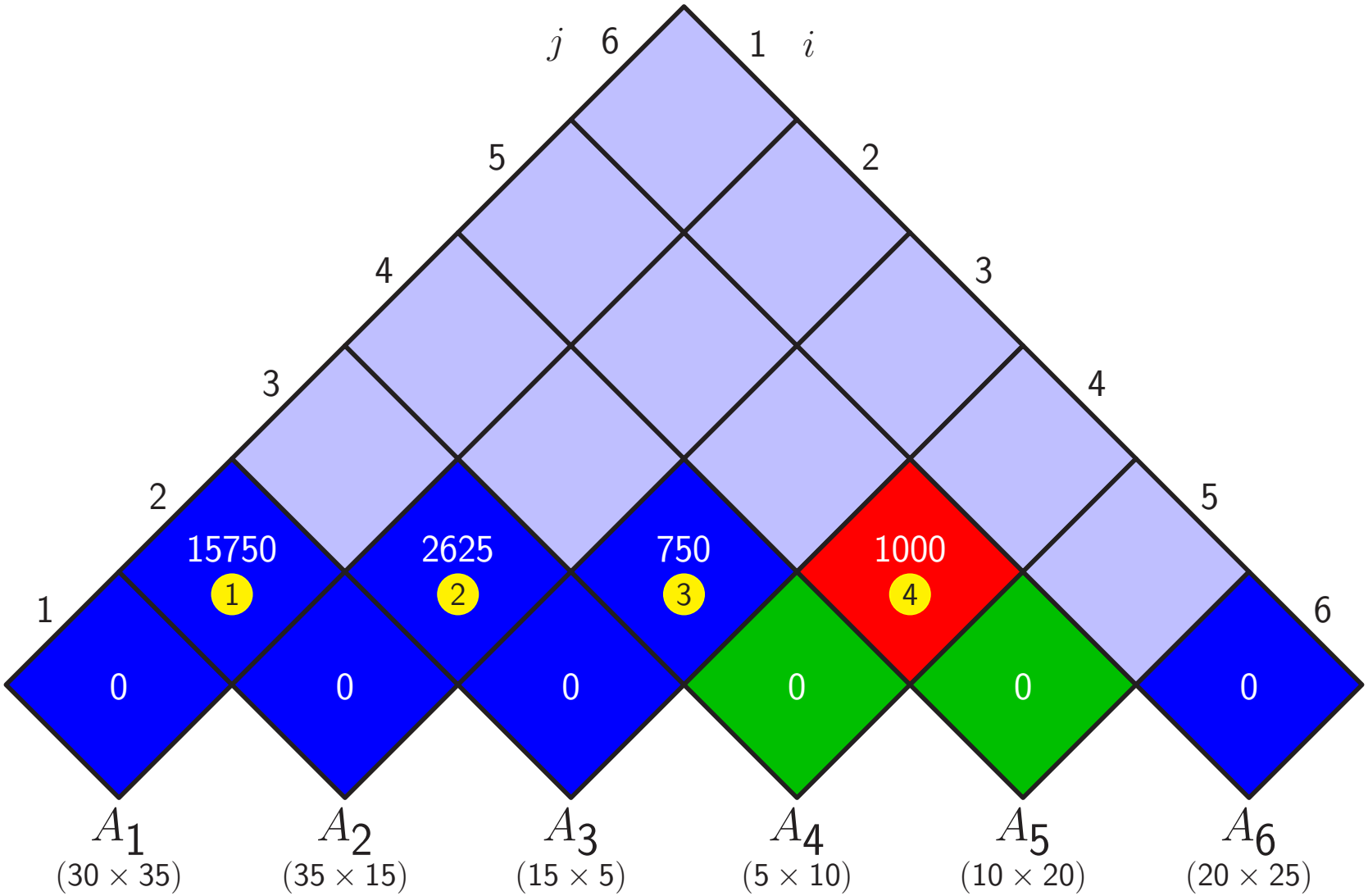
$$0 + 0 + 35 \cdot 15 \cdot 5 = 2625$$

Beispiel (Forts.)



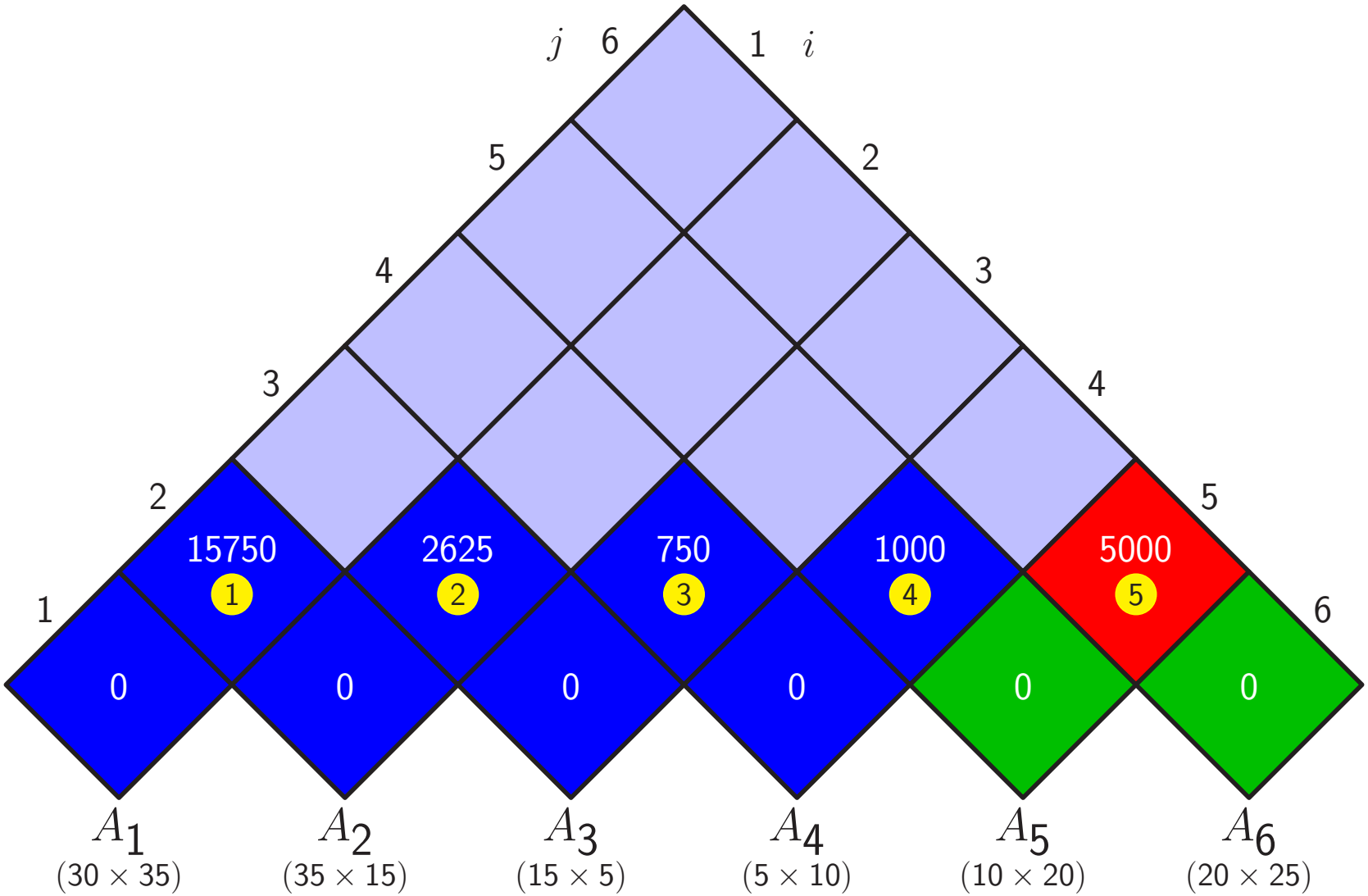
$$0 + 0 + 15 \cdot 5 \cdot 10 = 750$$

Beispiel (Forts.)



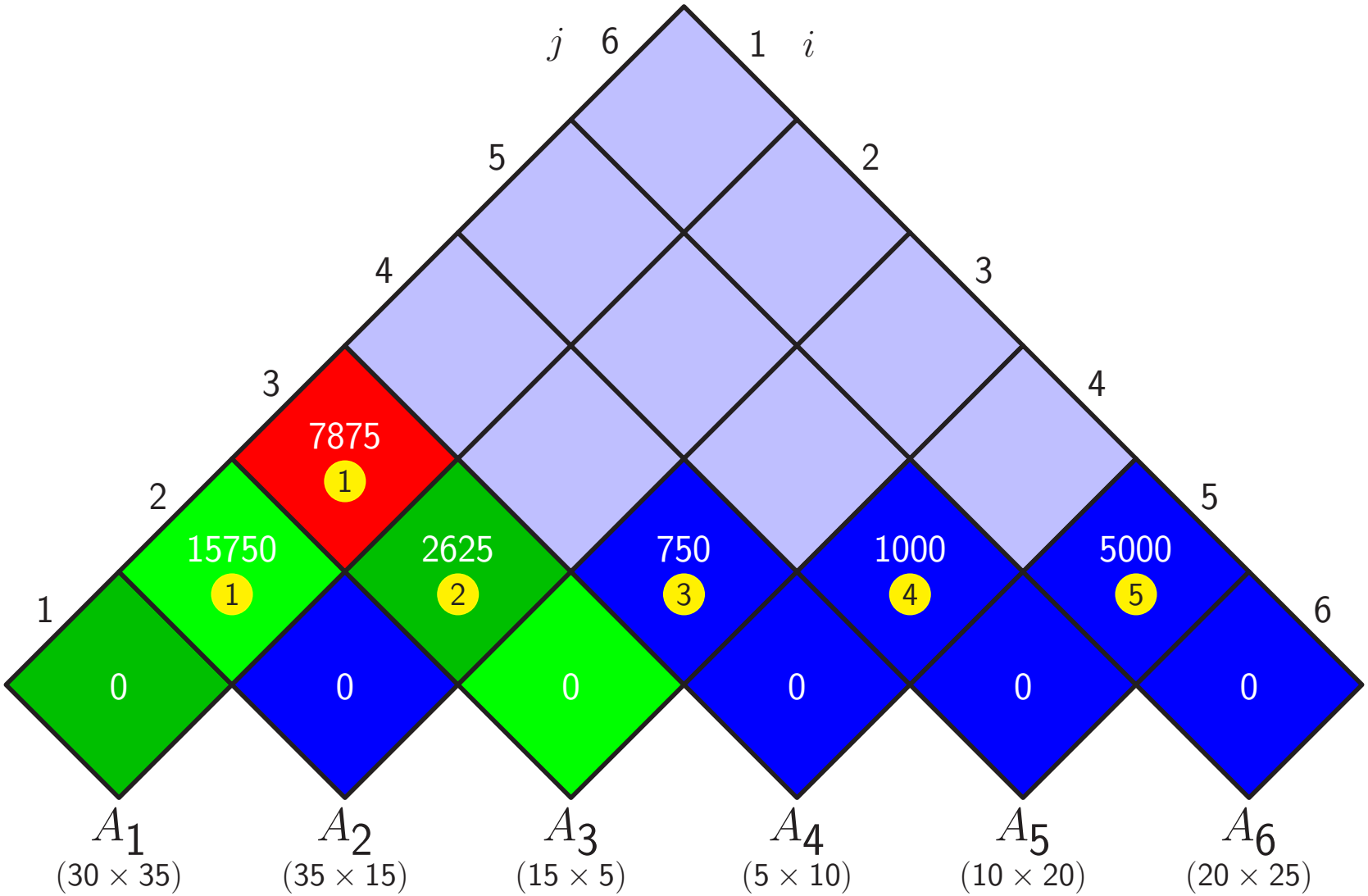
$$0 + 0 + 5 \cdot 10 \cdot 20 = 1000$$

Beispiel (Forts.)



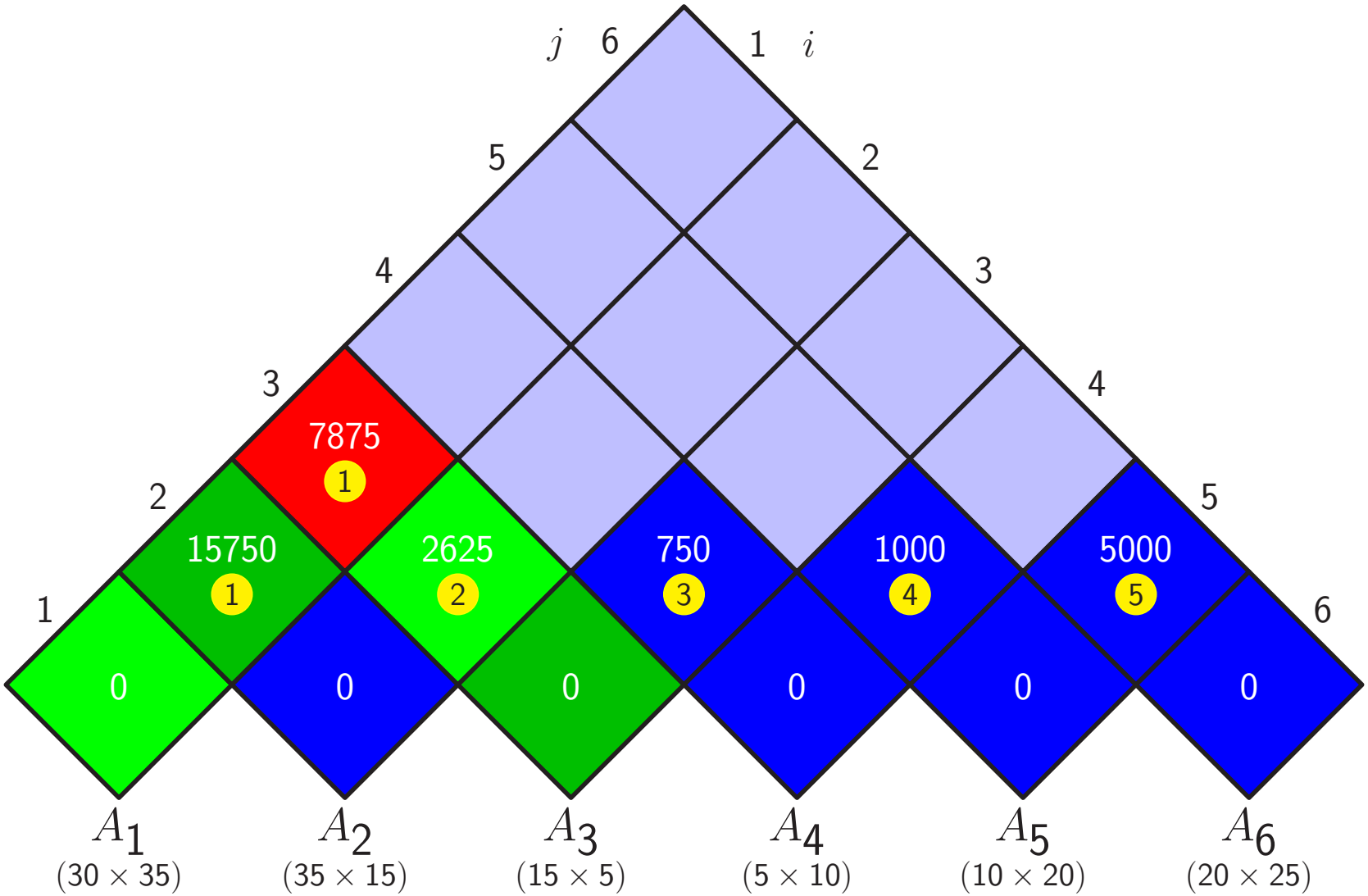
$$0 + 0 + 10 \cdot 20 \cdot 25 = 5000$$

Beispiel (Forts.)



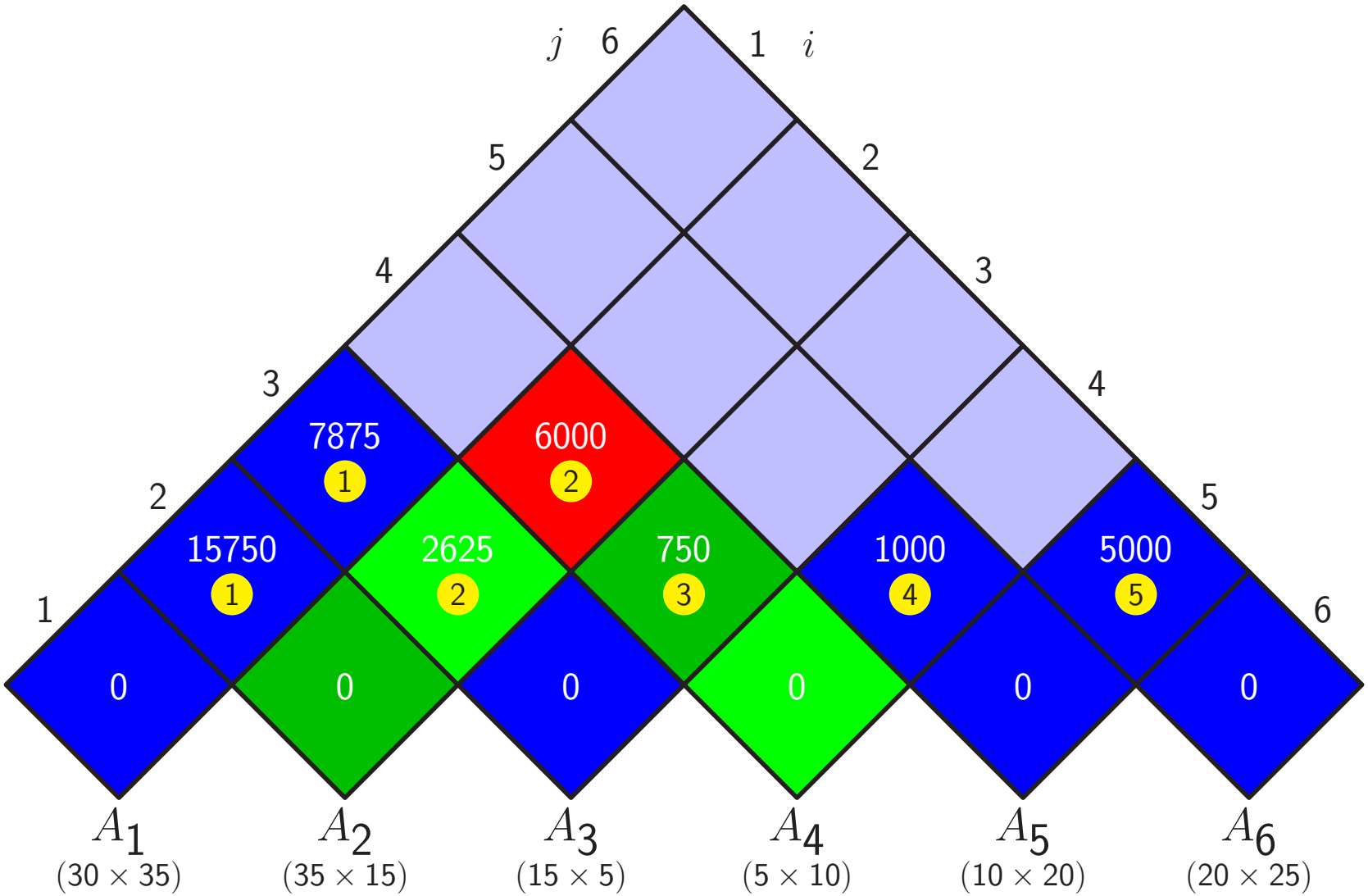
$$0 + 2625 + 30 \cdot 35 \cdot 5 = 7875$$

Beispiel (Forts.)



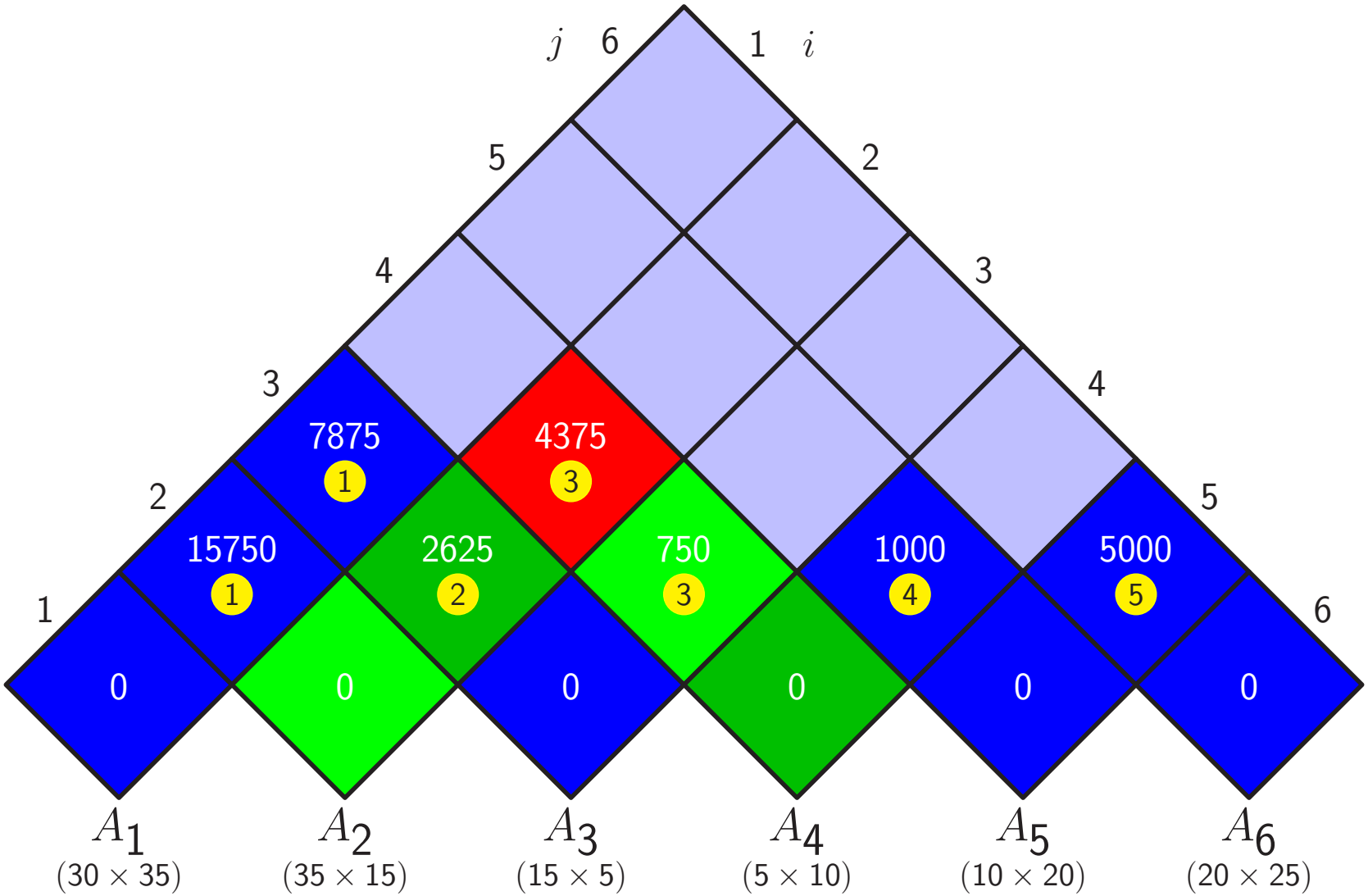
$$15750 + 0 + 30 \cdot 15 \cdot 5 = 18000$$

Beispiel (Forts.)



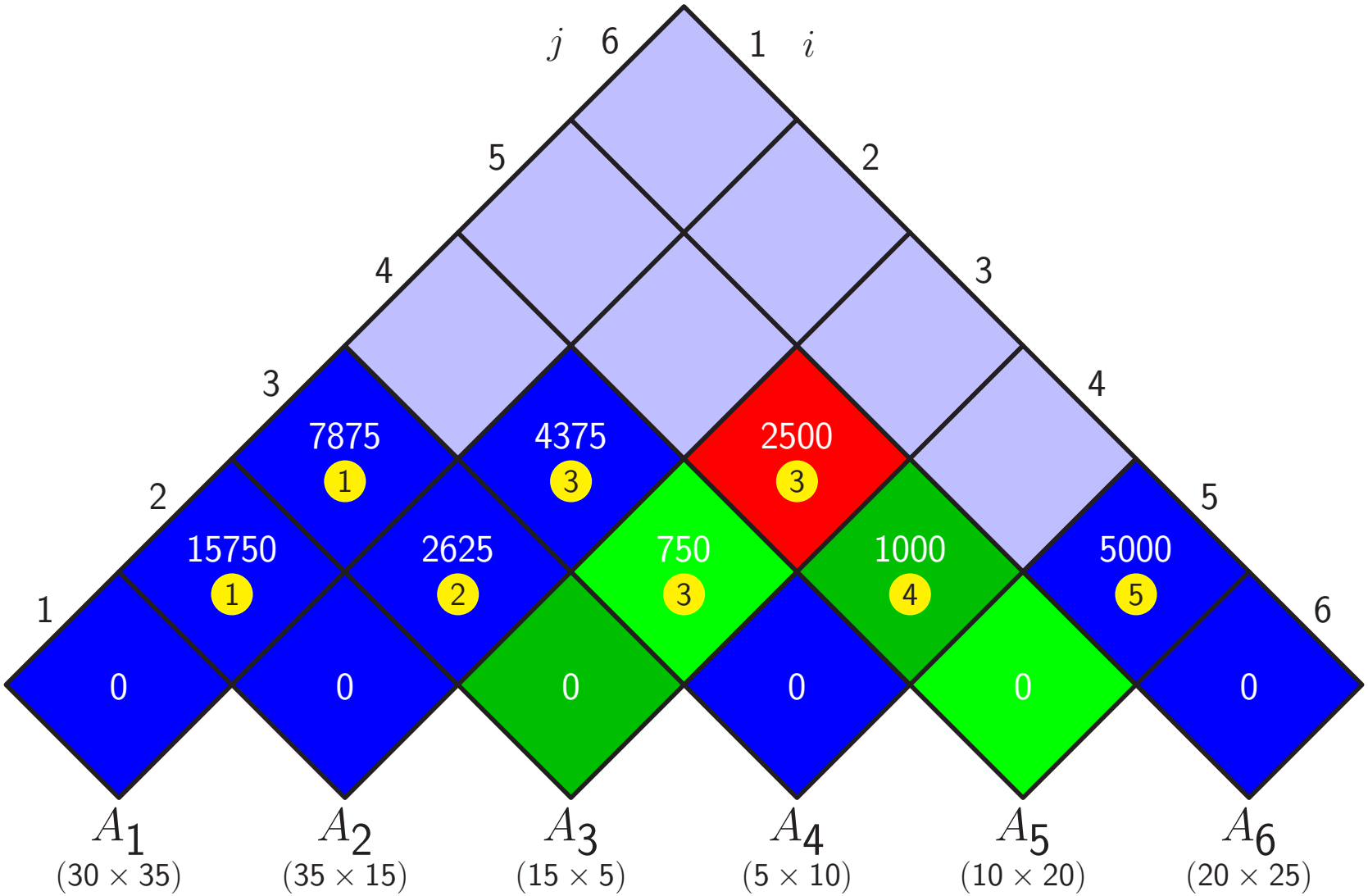
$$0 + 750 + 35 \cdot 15 \cdot 10 = 6000$$

Beispiel (Forts.)



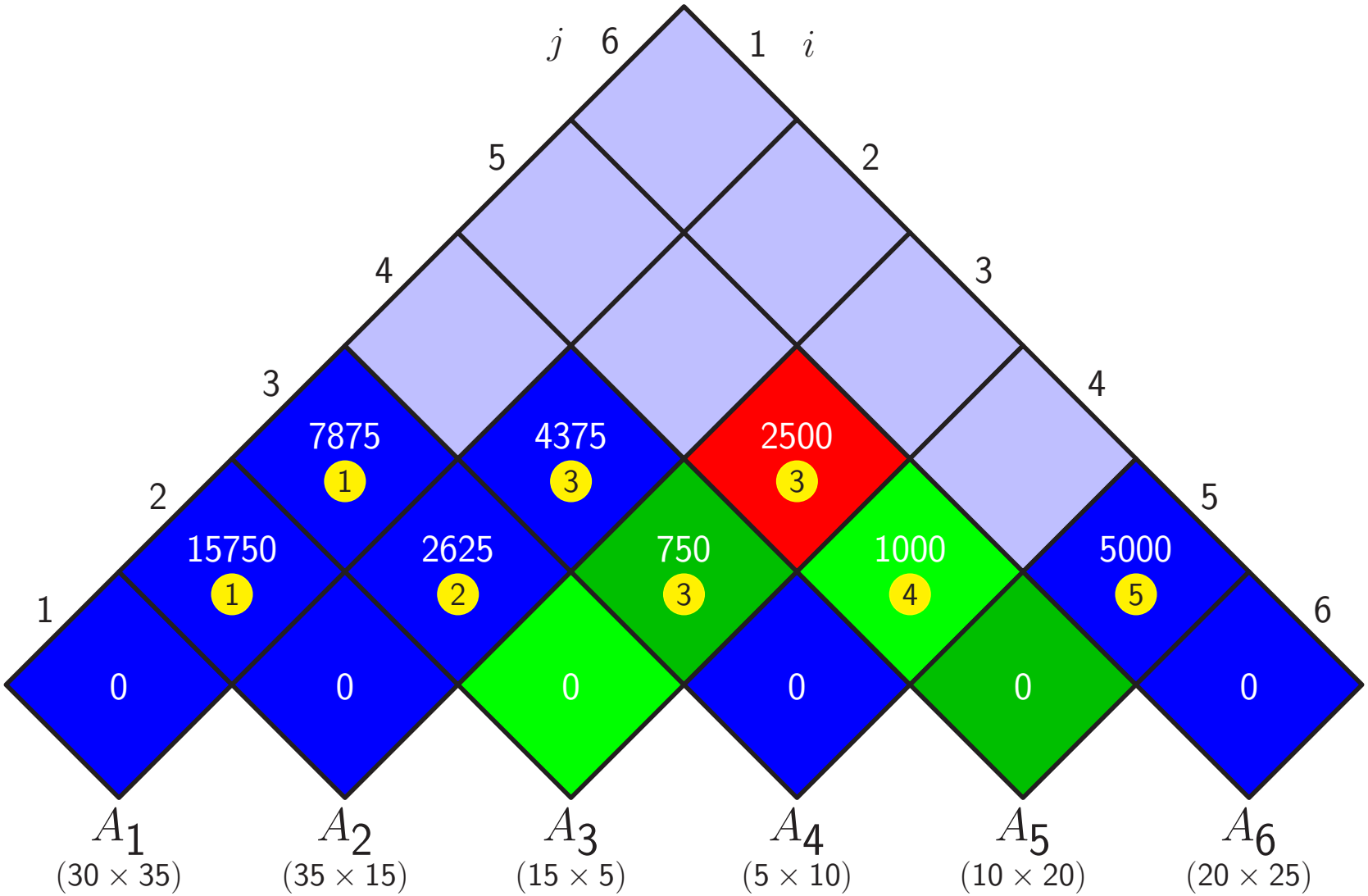
$$2625 + 0 + 35 \cdot 5 \cdot 10 = 4375$$

Beispiel (Forts.)



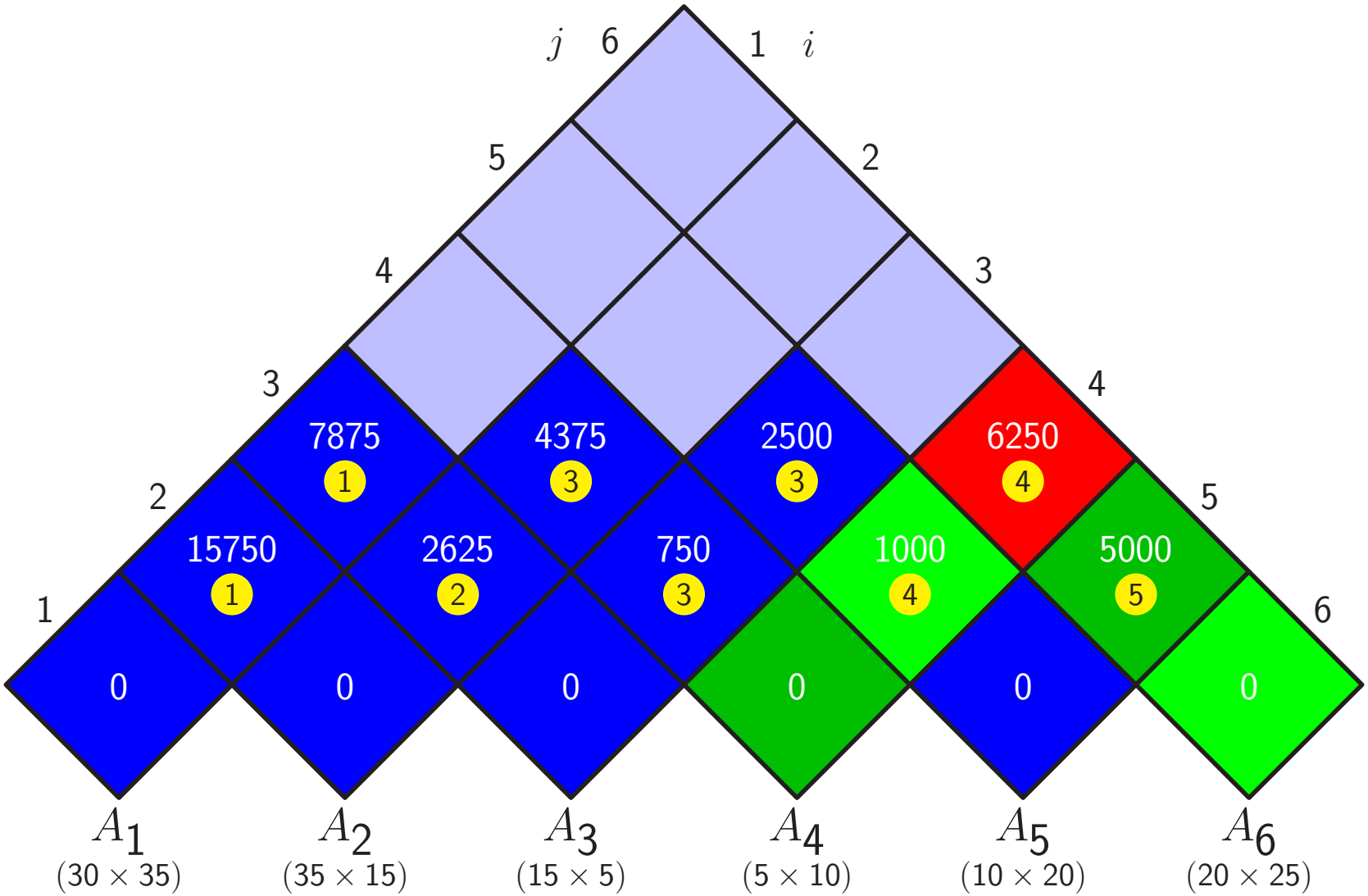
$$0 + 1000 + 15 \cdot 5 \cdot 20 = 2500$$

Beispiel (Forts.)



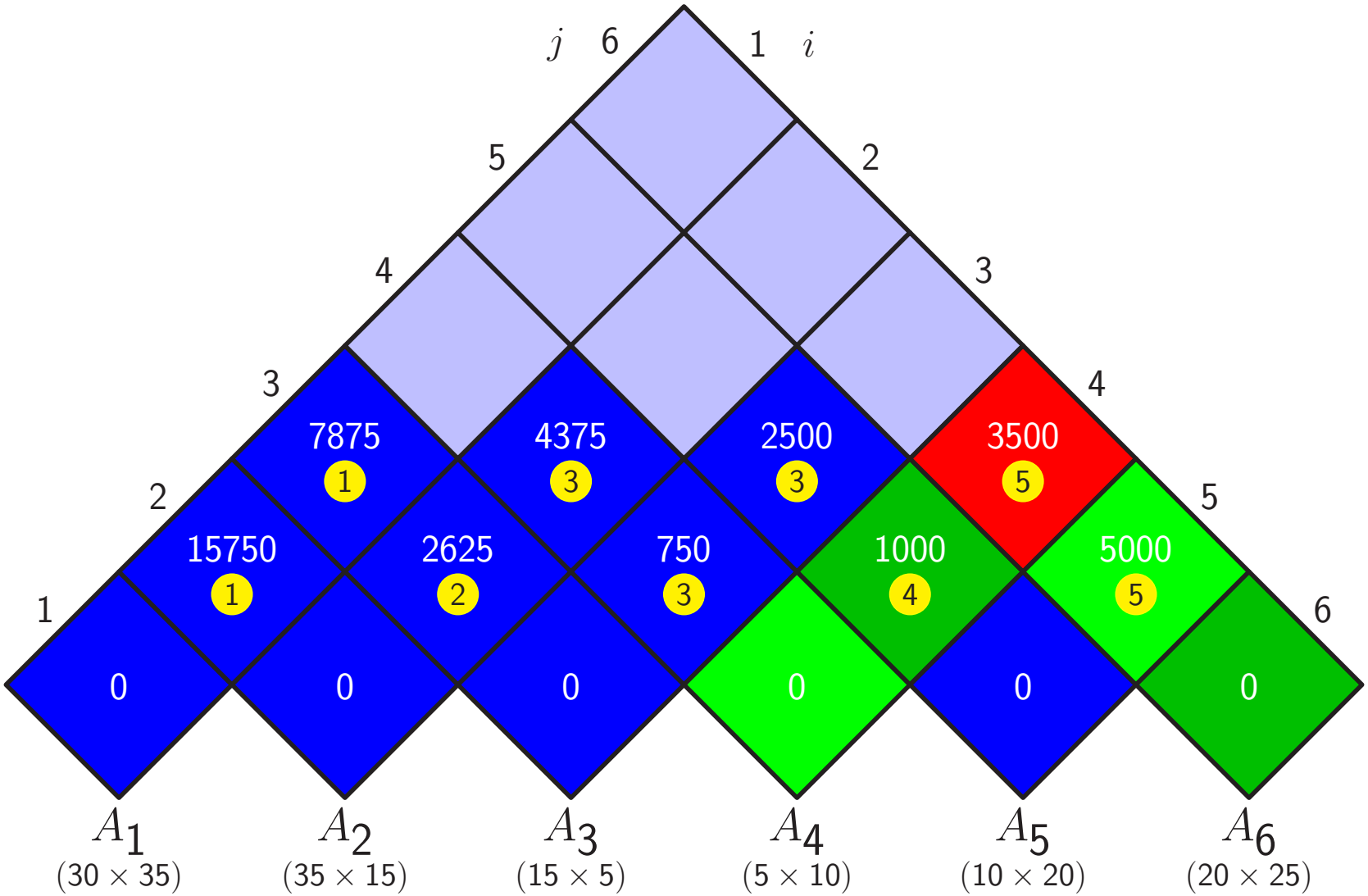
$$750 + 0 + 15 \cdot 10 \cdot 20 = 3750$$

Beispiel (Forts.)



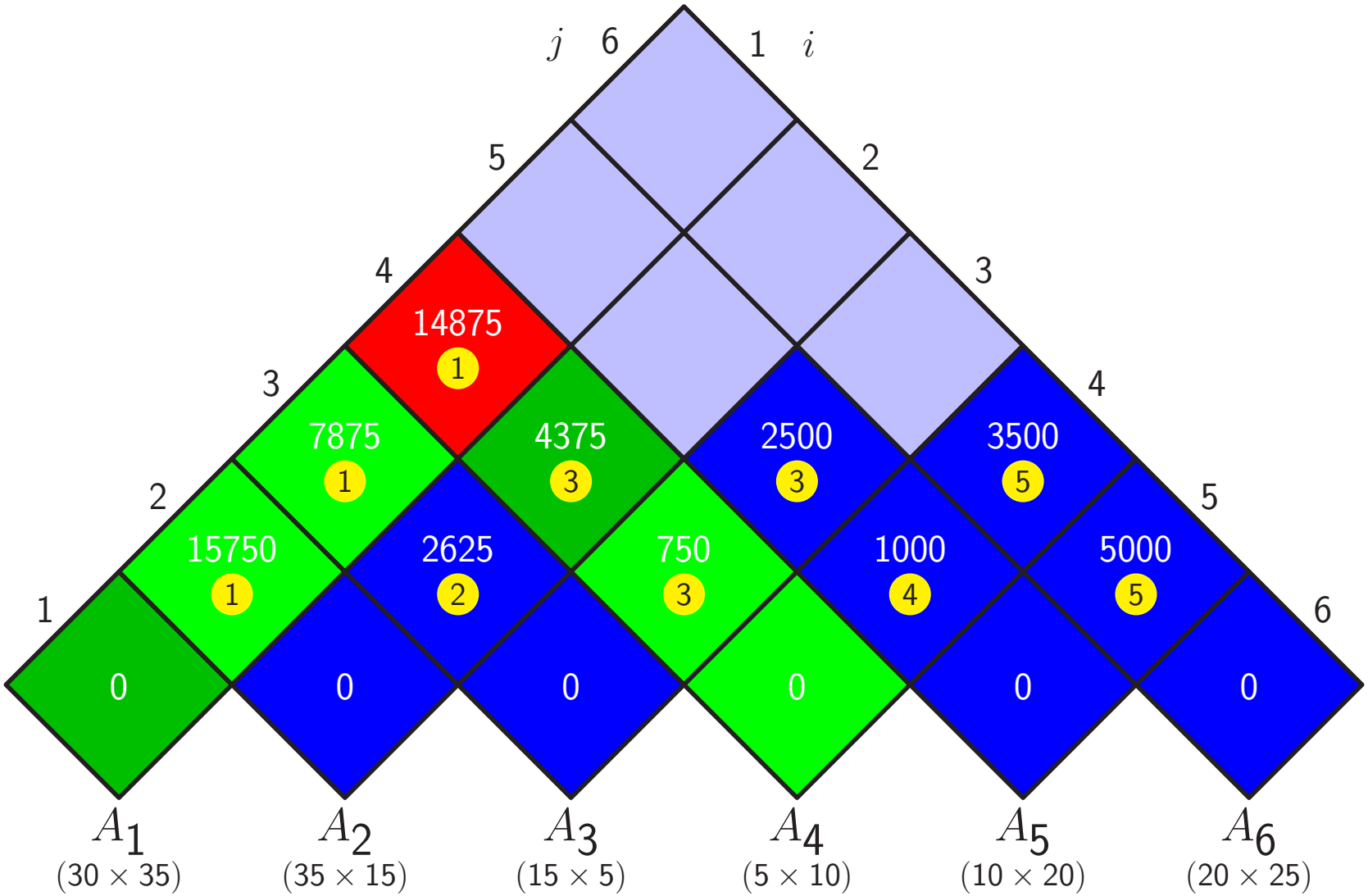
$$0 + 5000 + 5 \cdot 10 \cdot 25 = 6250$$

Beispiel (Forts.)



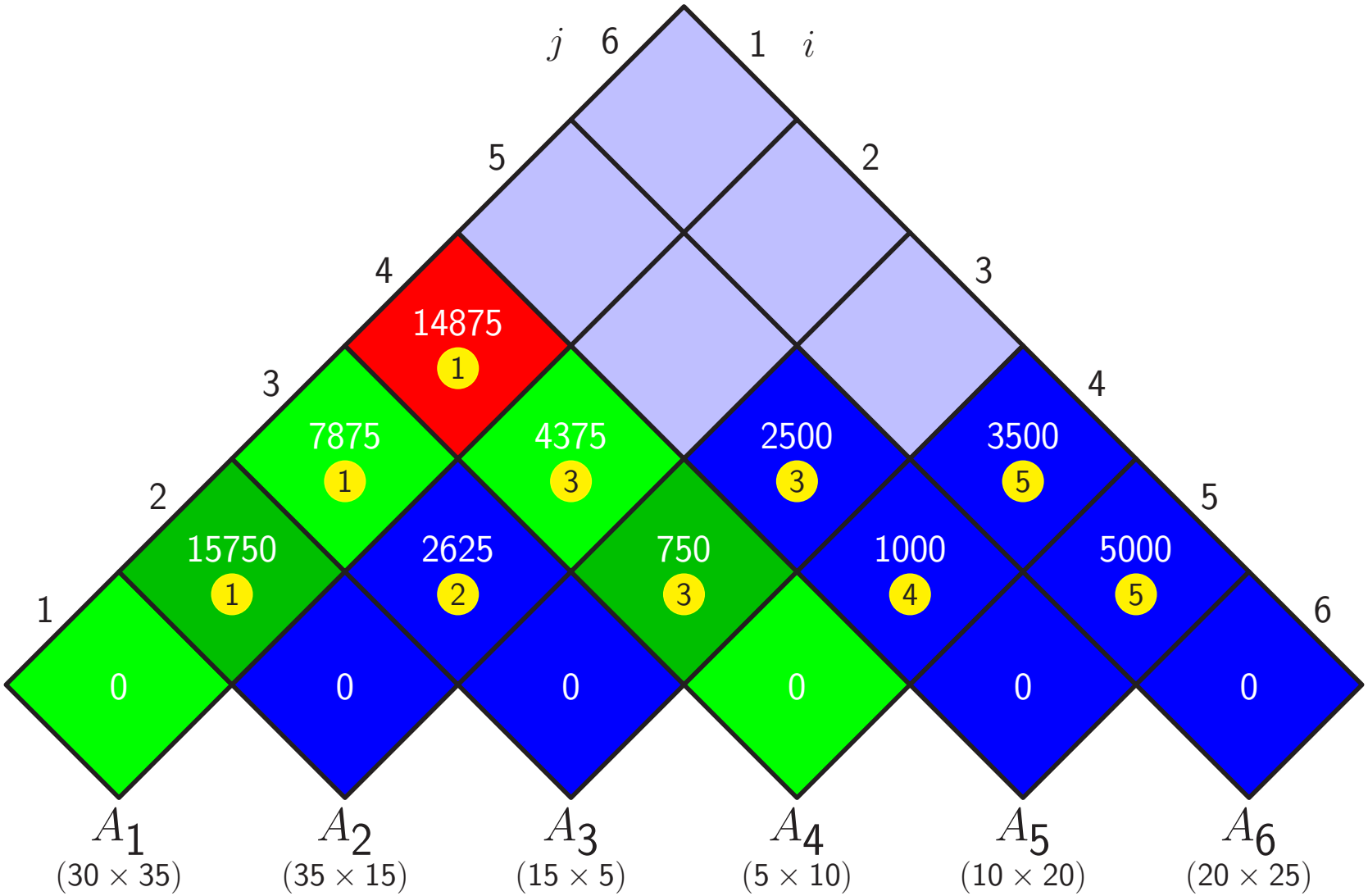
$$1000 + 0 + 5 \cdot 20 \cdot 25 = 3500$$

Beispiel (Forts.)



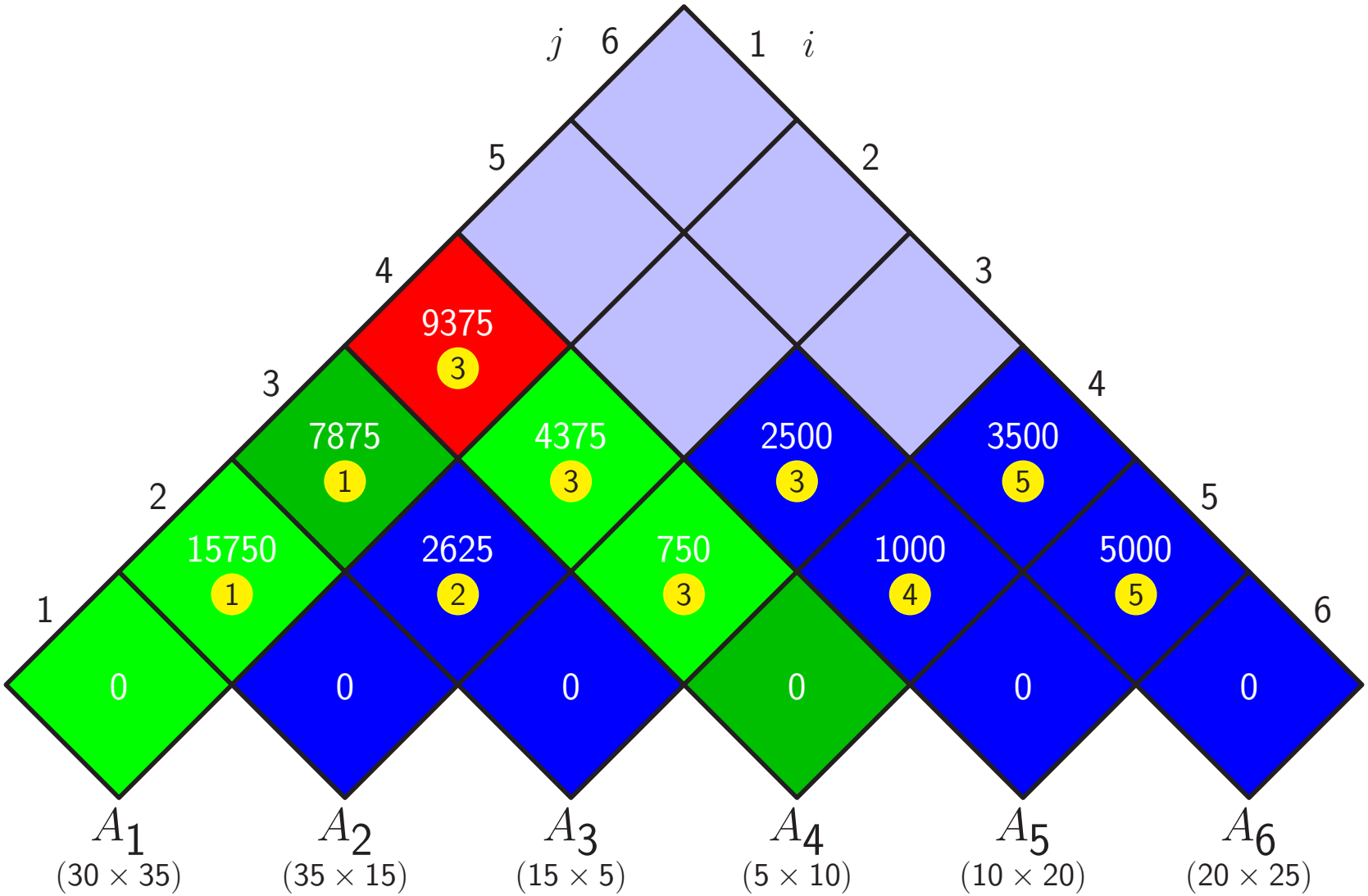
$$0 + 4375 + 30 \cdot 35 \cdot 10 = 14875$$

Beispiel (Forts.)



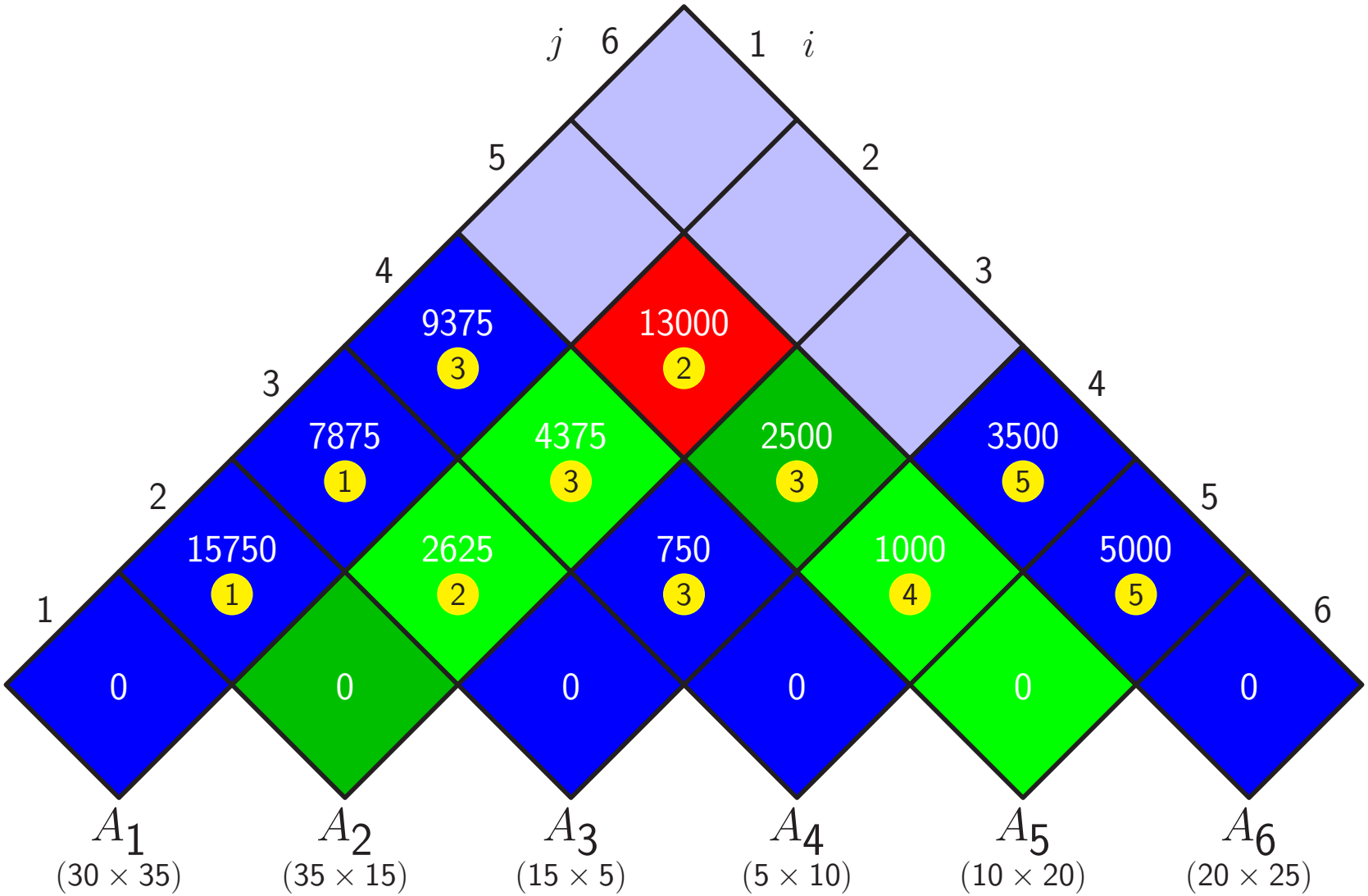
$$15750 + 750 + 30 \cdot 15 \cdot 10 = 21000$$

Beispiel (Forts.)



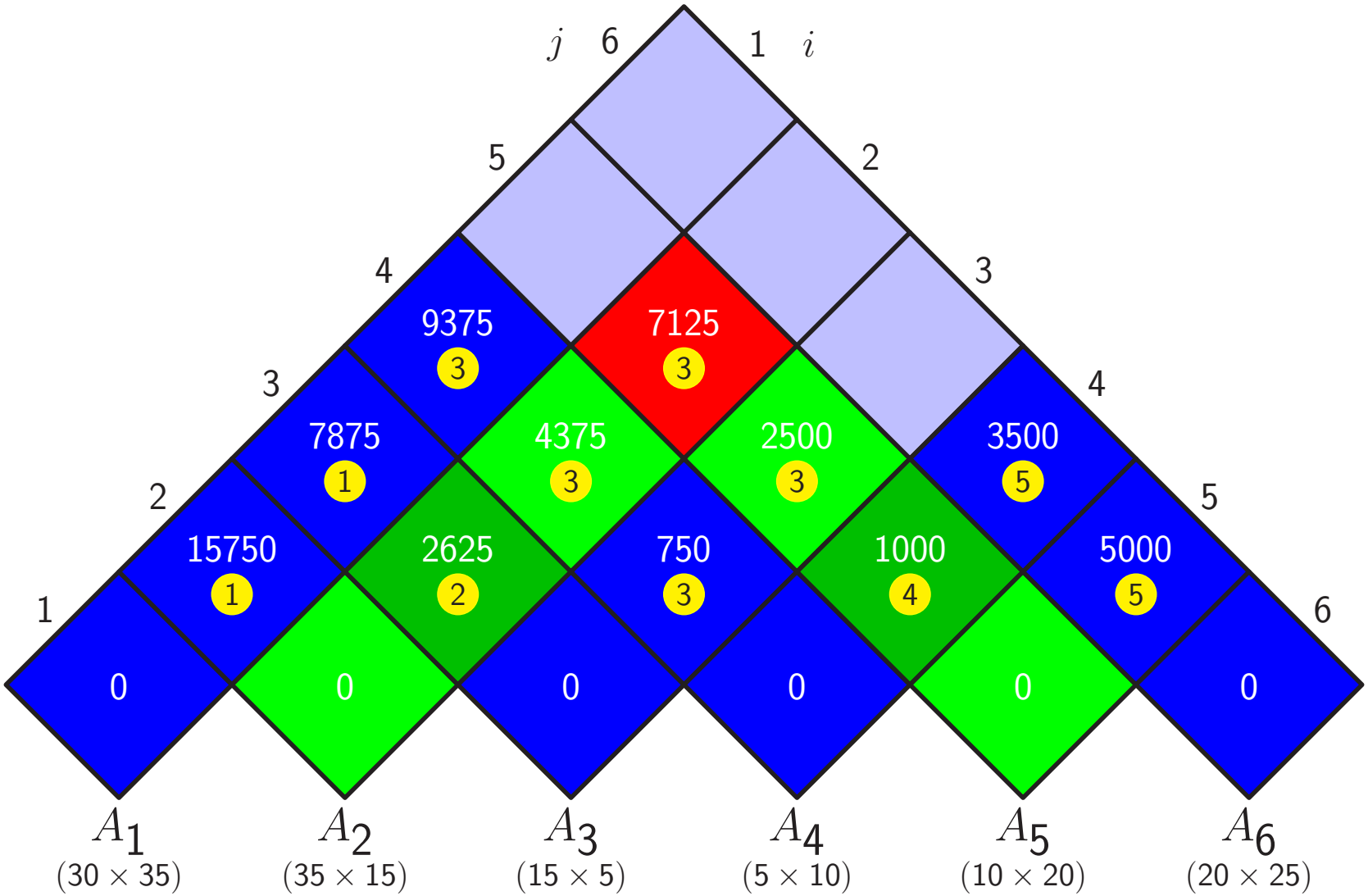
$$7875 + 0 + 30 \cdot 5 \cdot 10 = 9375$$

Beispiel (Forts.)



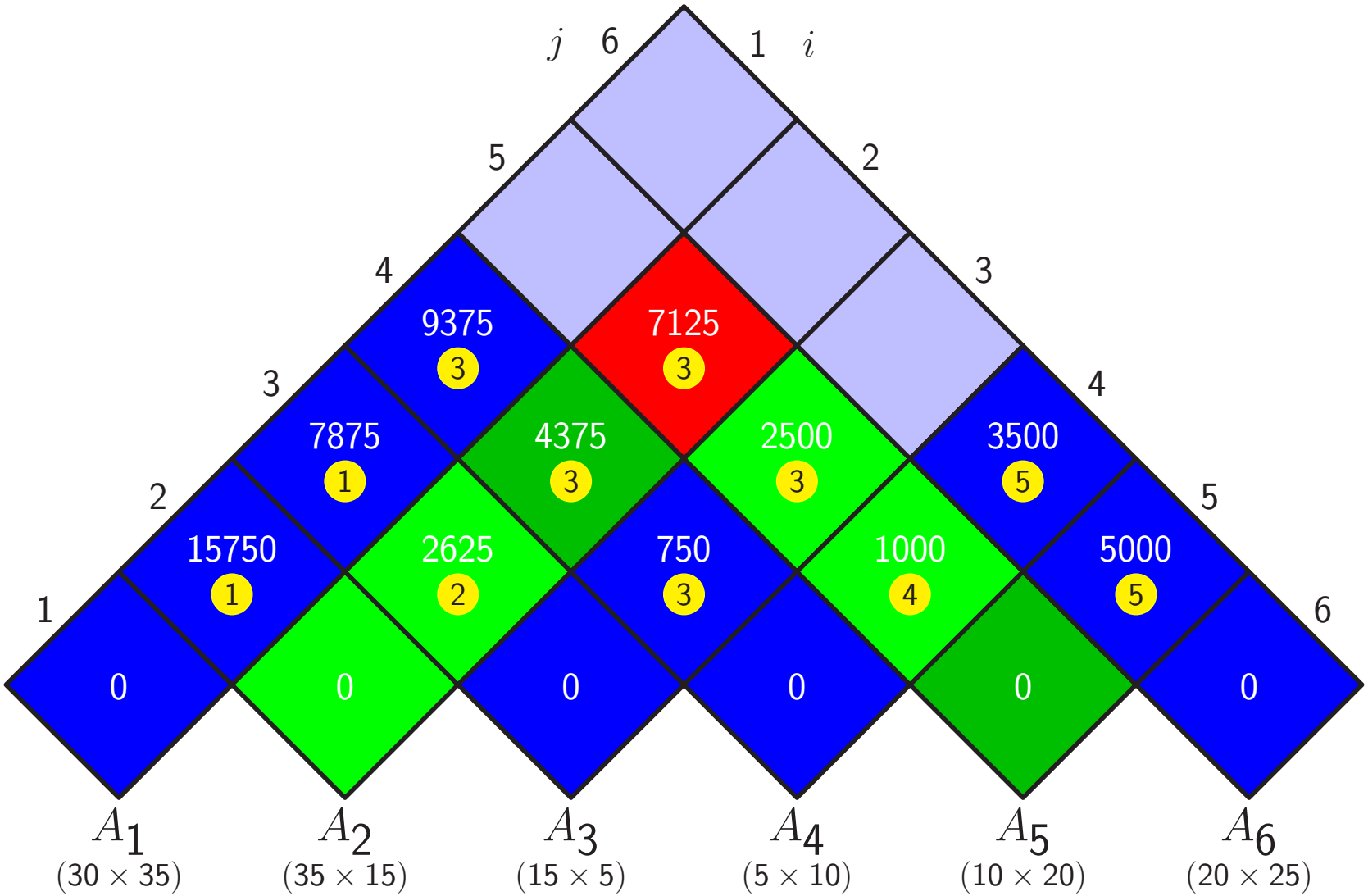
$$0 + 2500 + 35 \cdot 15 \cdot 20 = 13000$$

Beispiel (Forts.)



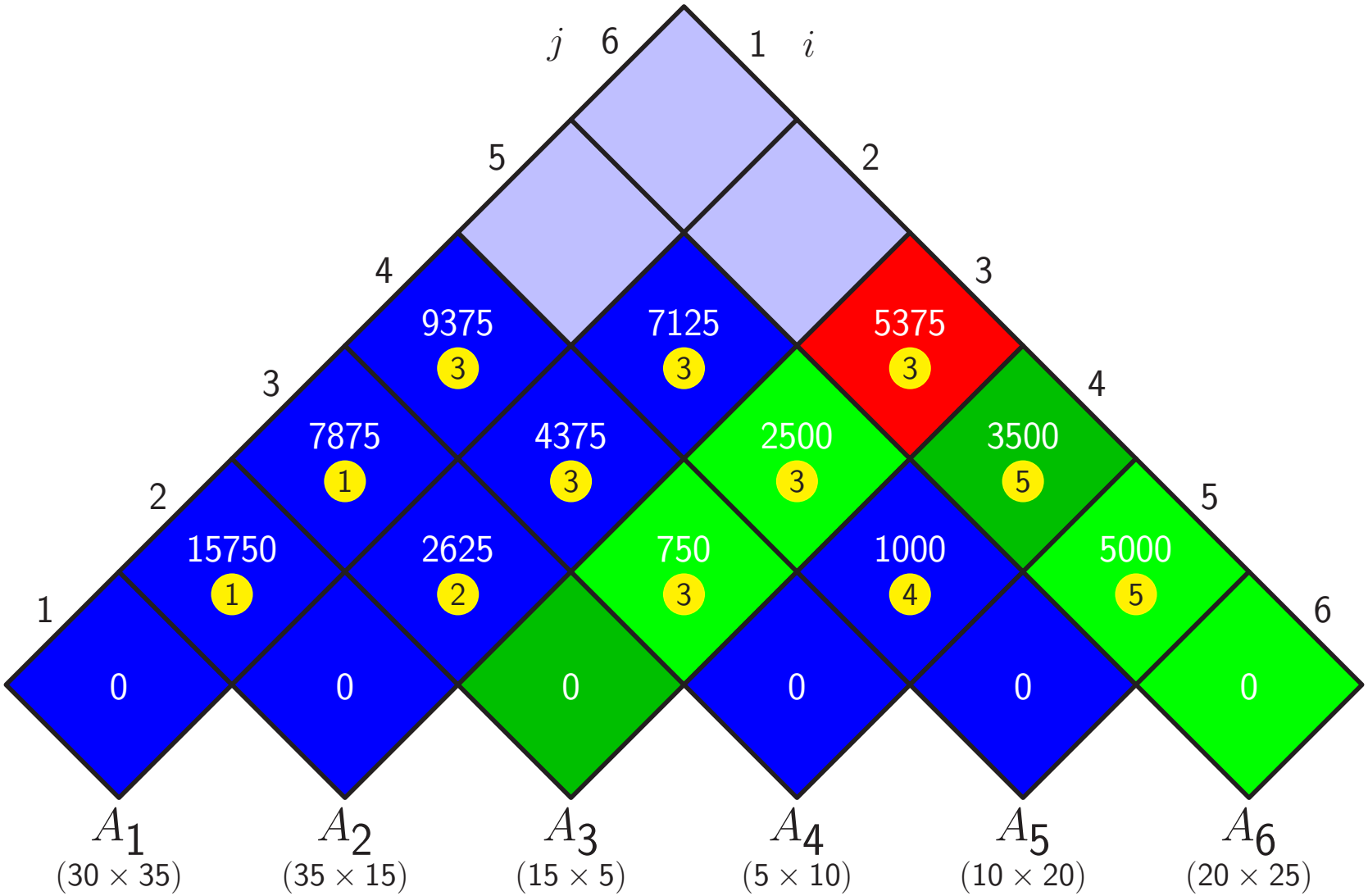
$$2625 + 1000 + 35 \cdot 5 \cdot 20 = 7125$$

Beispiel (Forts.)



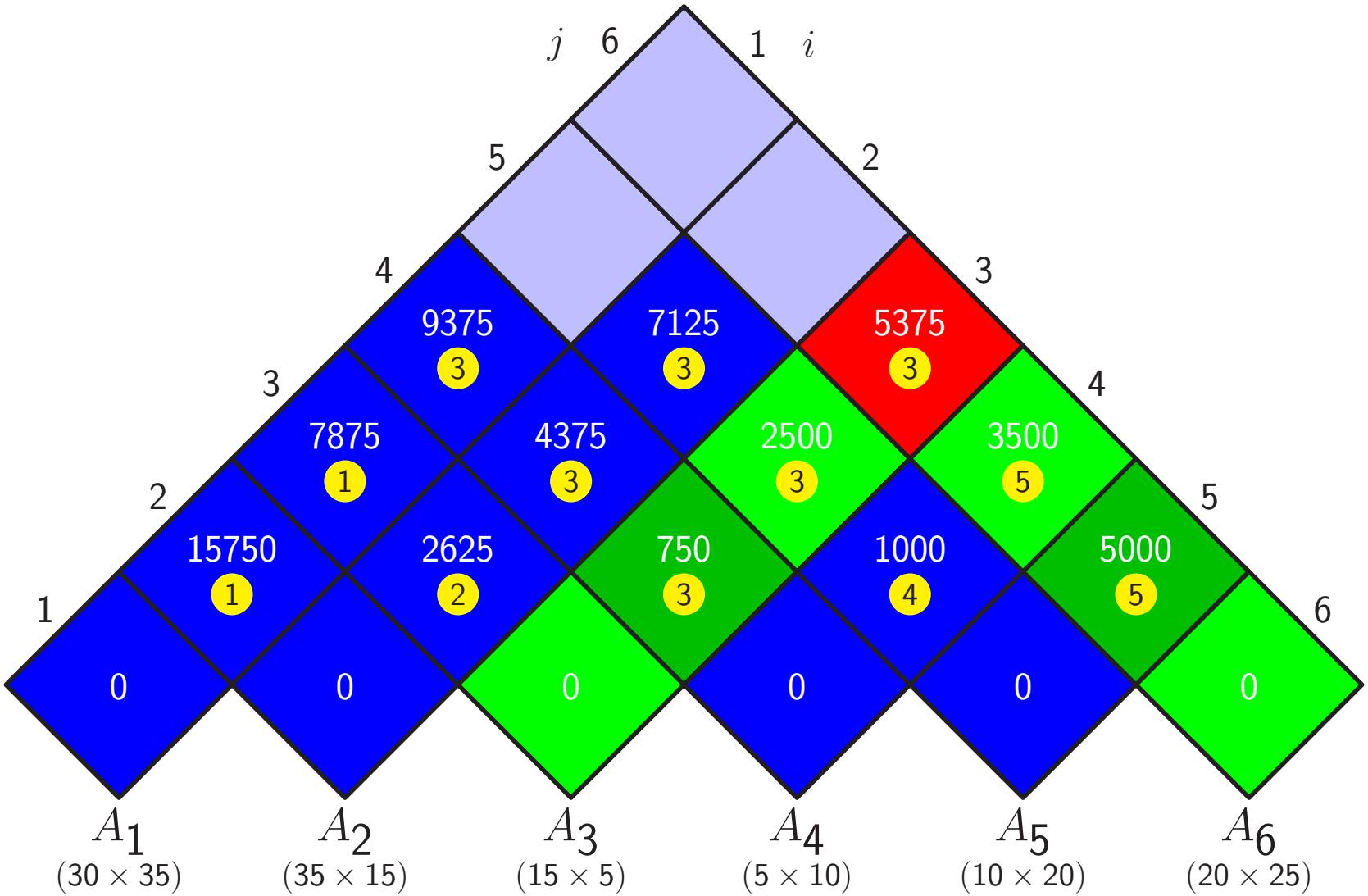
$$4375 + 0 + 35 \cdot 10 \cdot 20 = 11375$$

Beispiel (Forts.)



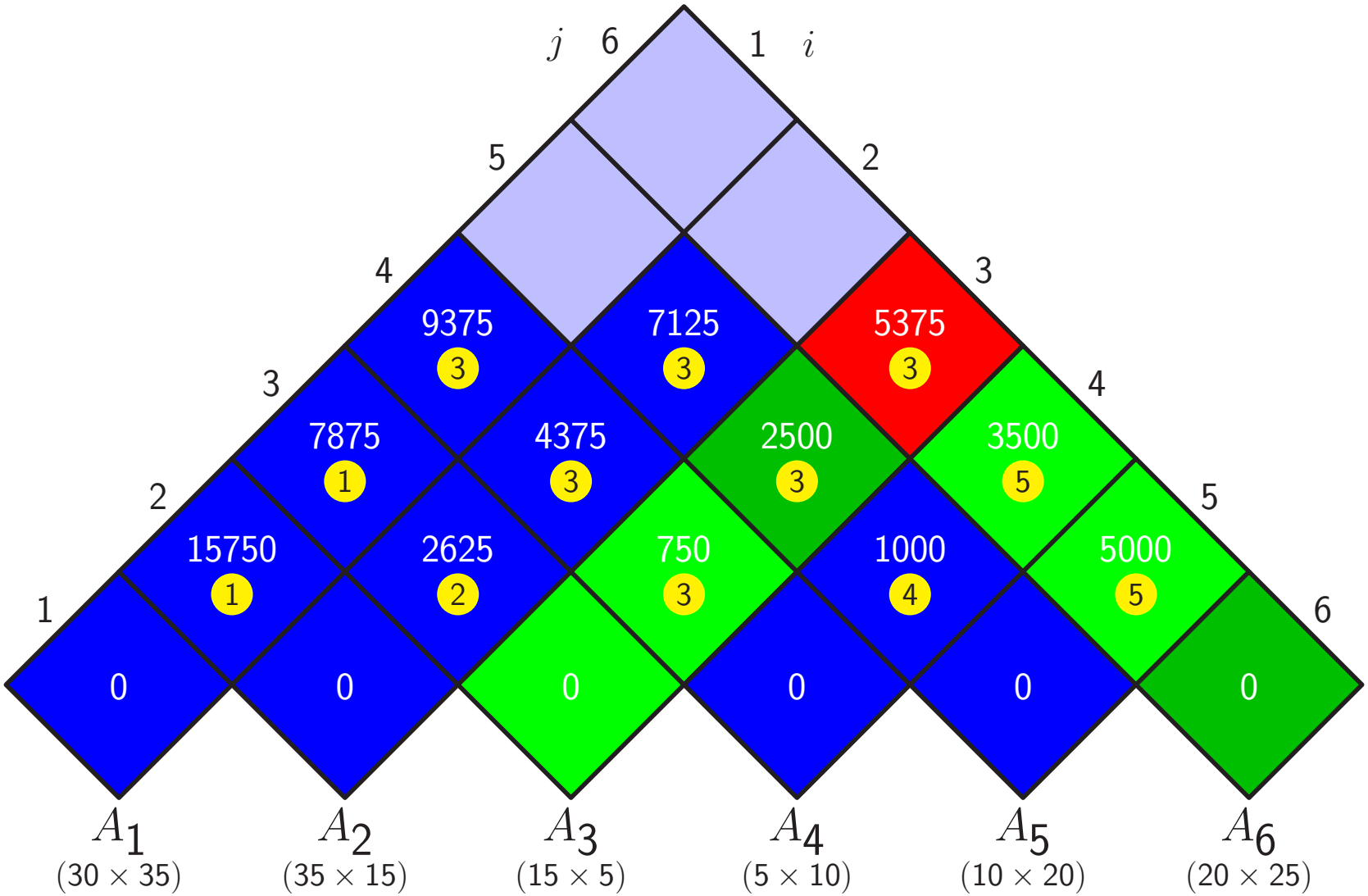
$$0 + 3500 + 15 \cdot 5 \cdot 25 = 5375$$

Beispiel (Forts.)



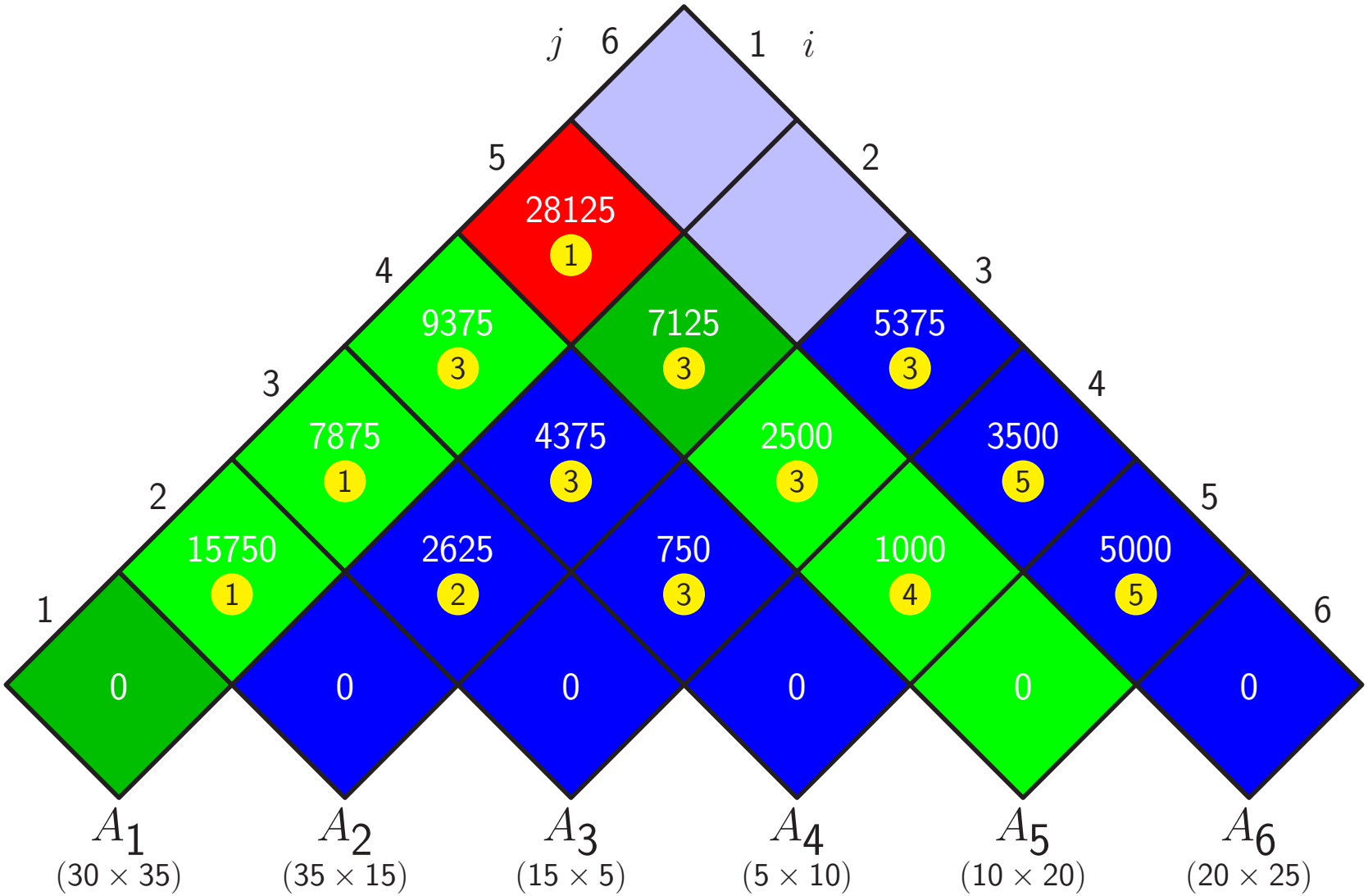
$$750 + 5000 + 15 \cdot 10 \cdot 25 = 9500$$

Beispiel (Forts.)



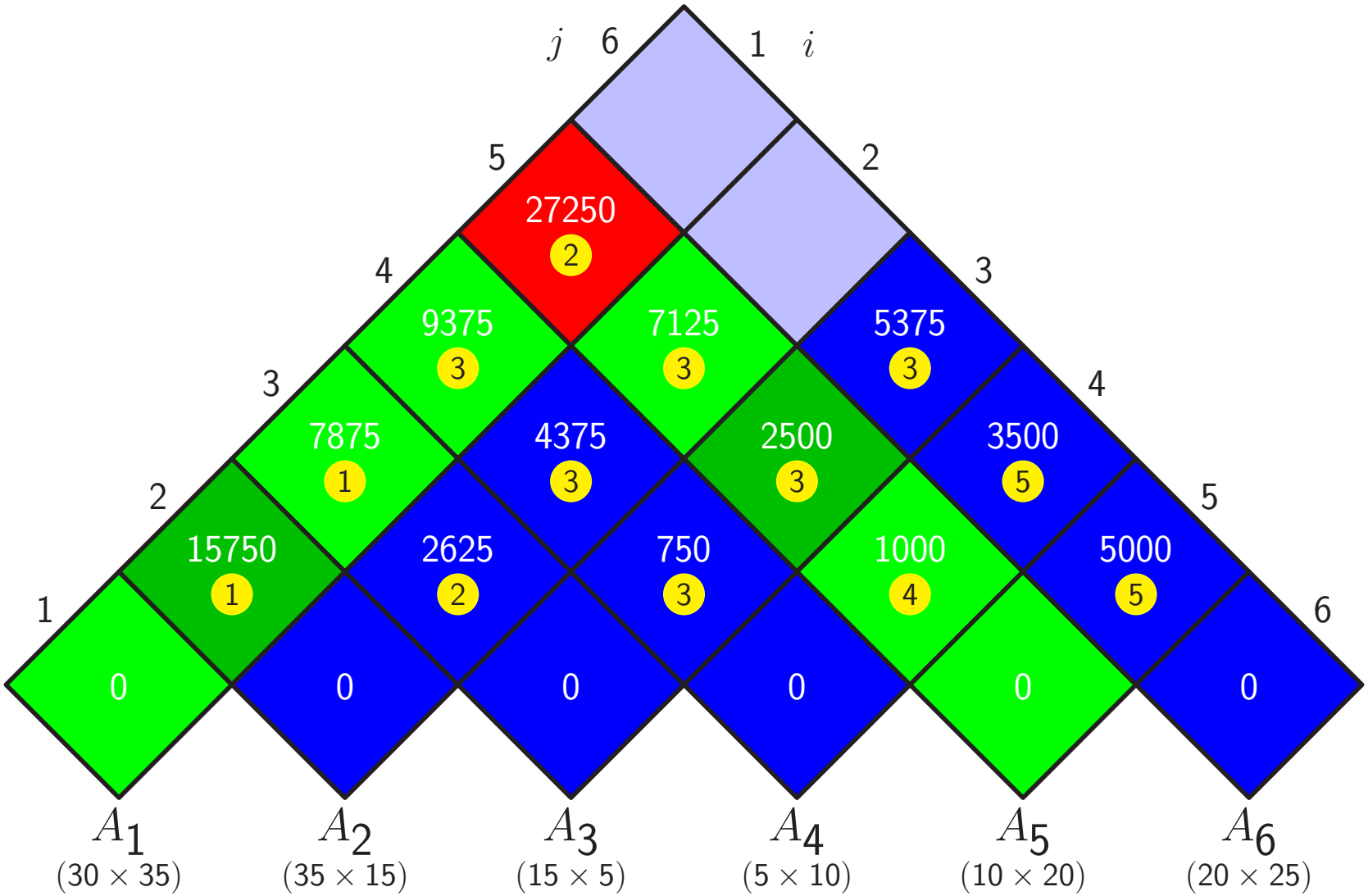
$$2500 + 0 + 15 \cdot 20 \cdot 25 = 10000$$

Beispiel (Forts.)



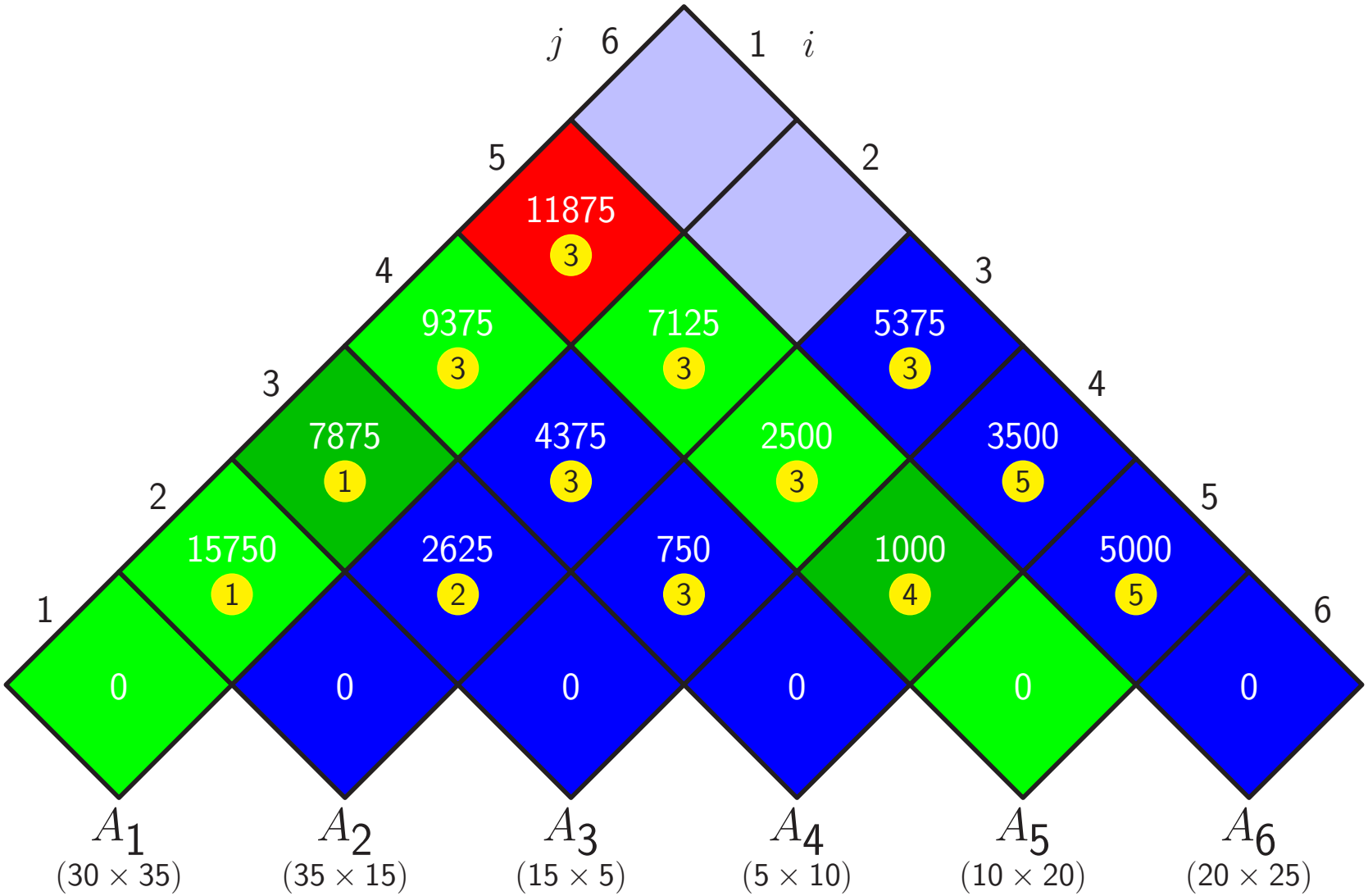
$$0 + 7125 + 30 \cdot 35 \cdot 20 = 28125$$

Beispiel (Forts.)



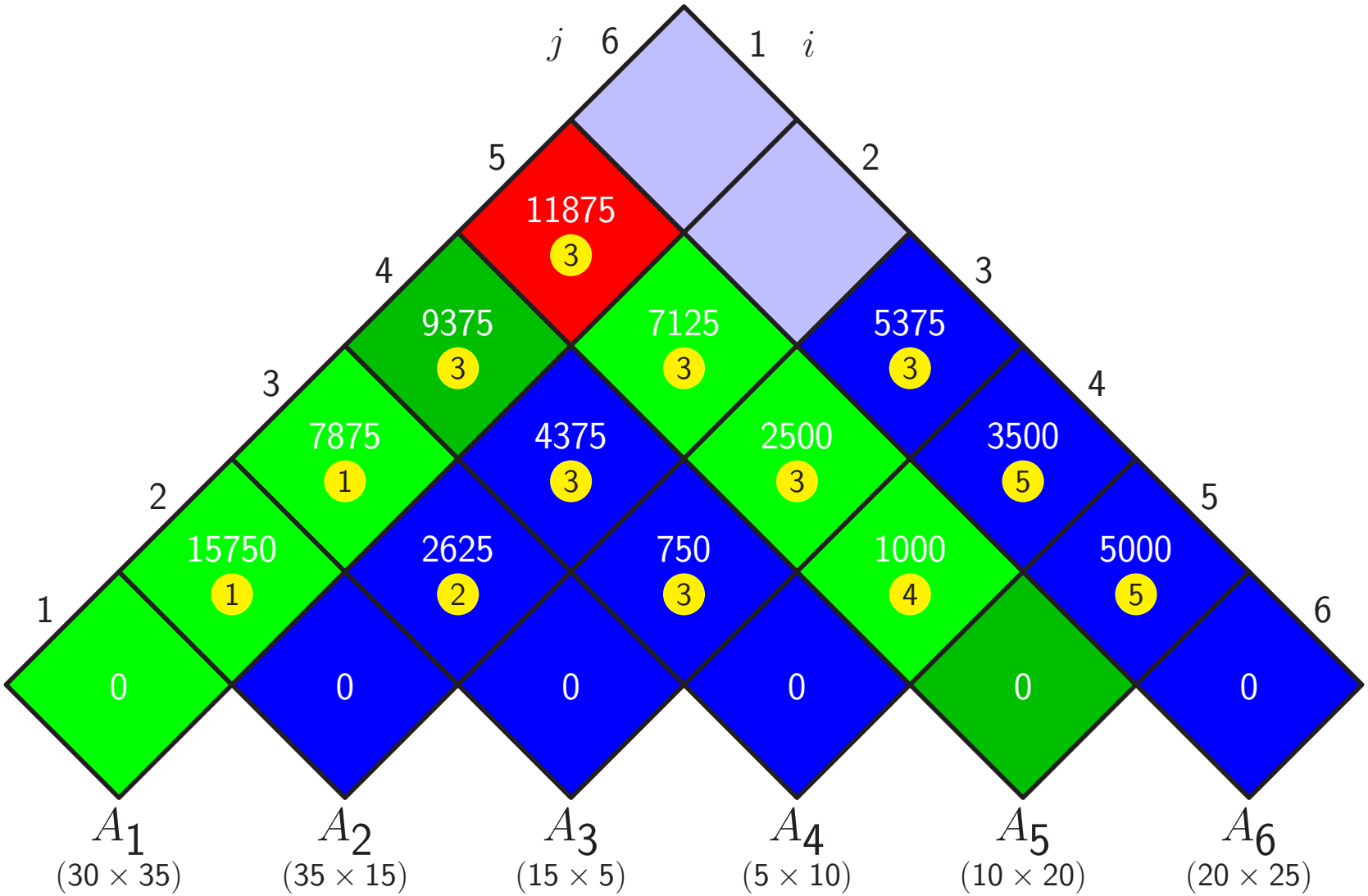
$$15750 + 2500 + 30 \cdot 15 \cdot 20 = 27250$$

Beispiel (Forts.)



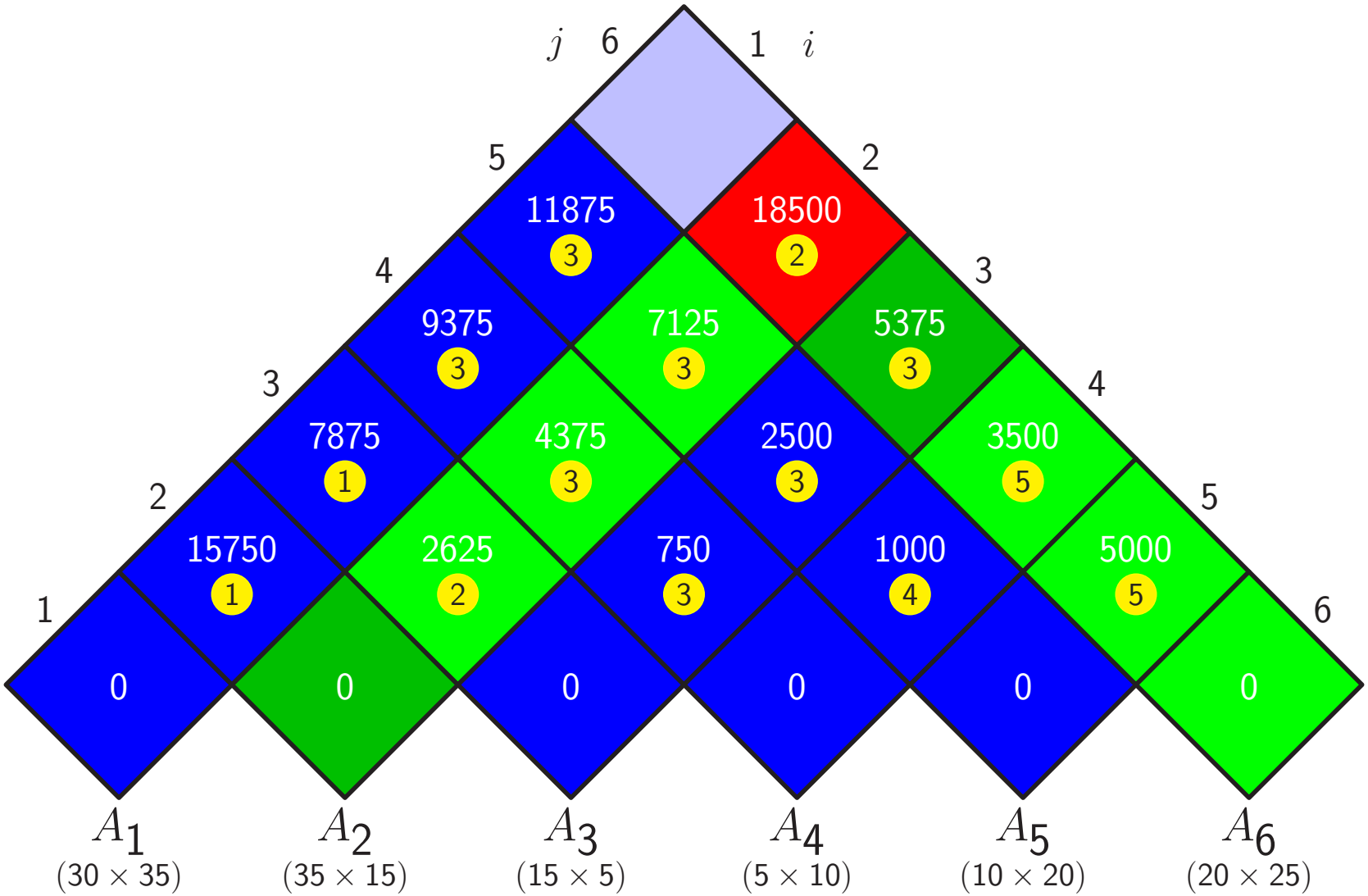
$$7875 + 1000 + 30 \cdot 5 \cdot 20 = 11875$$

Beispiel (Forts.)



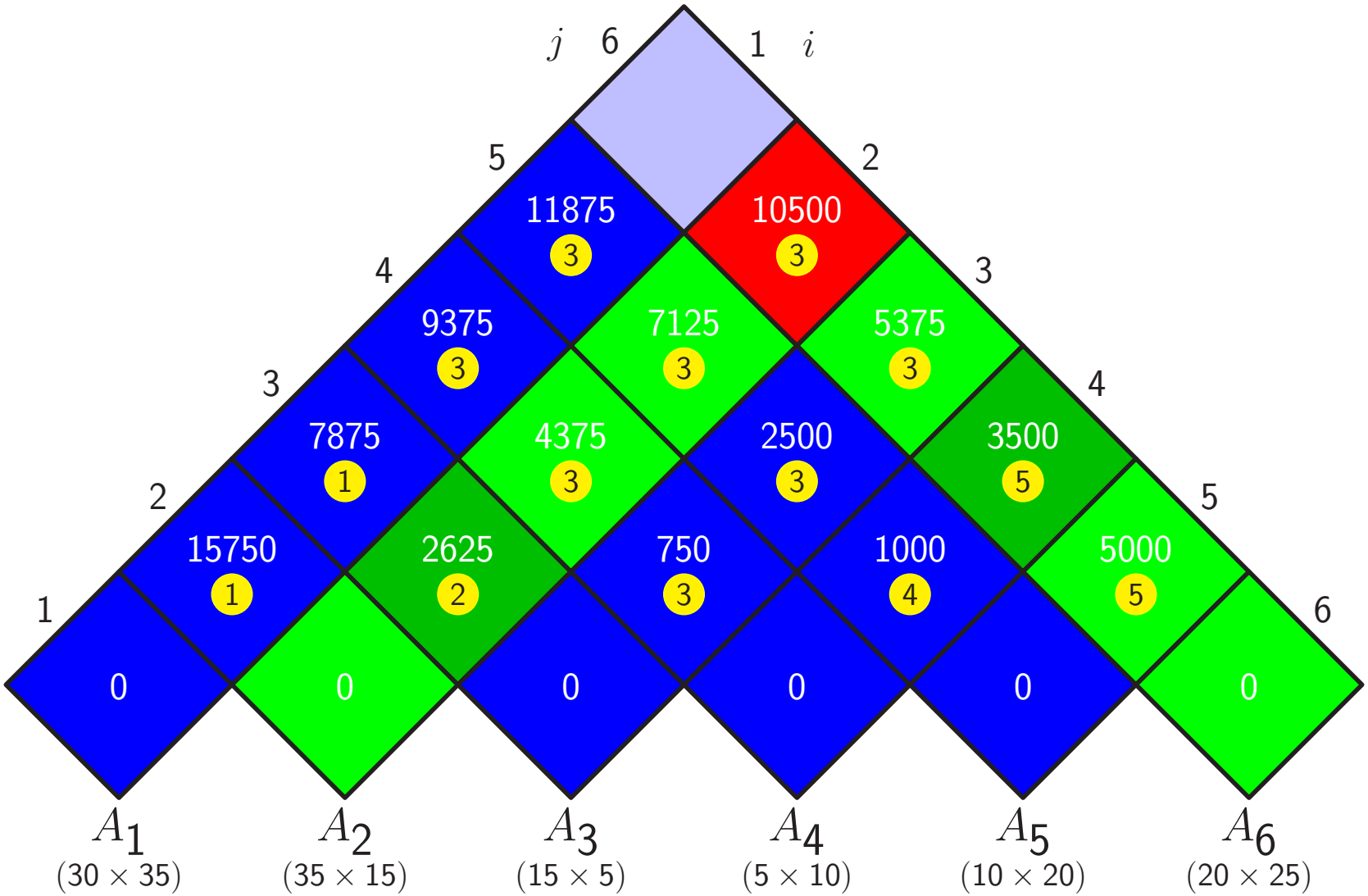
$$9375 + 0 + 30 \cdot 10 \cdot 20 = 15375$$

Beispiel (Forts.)



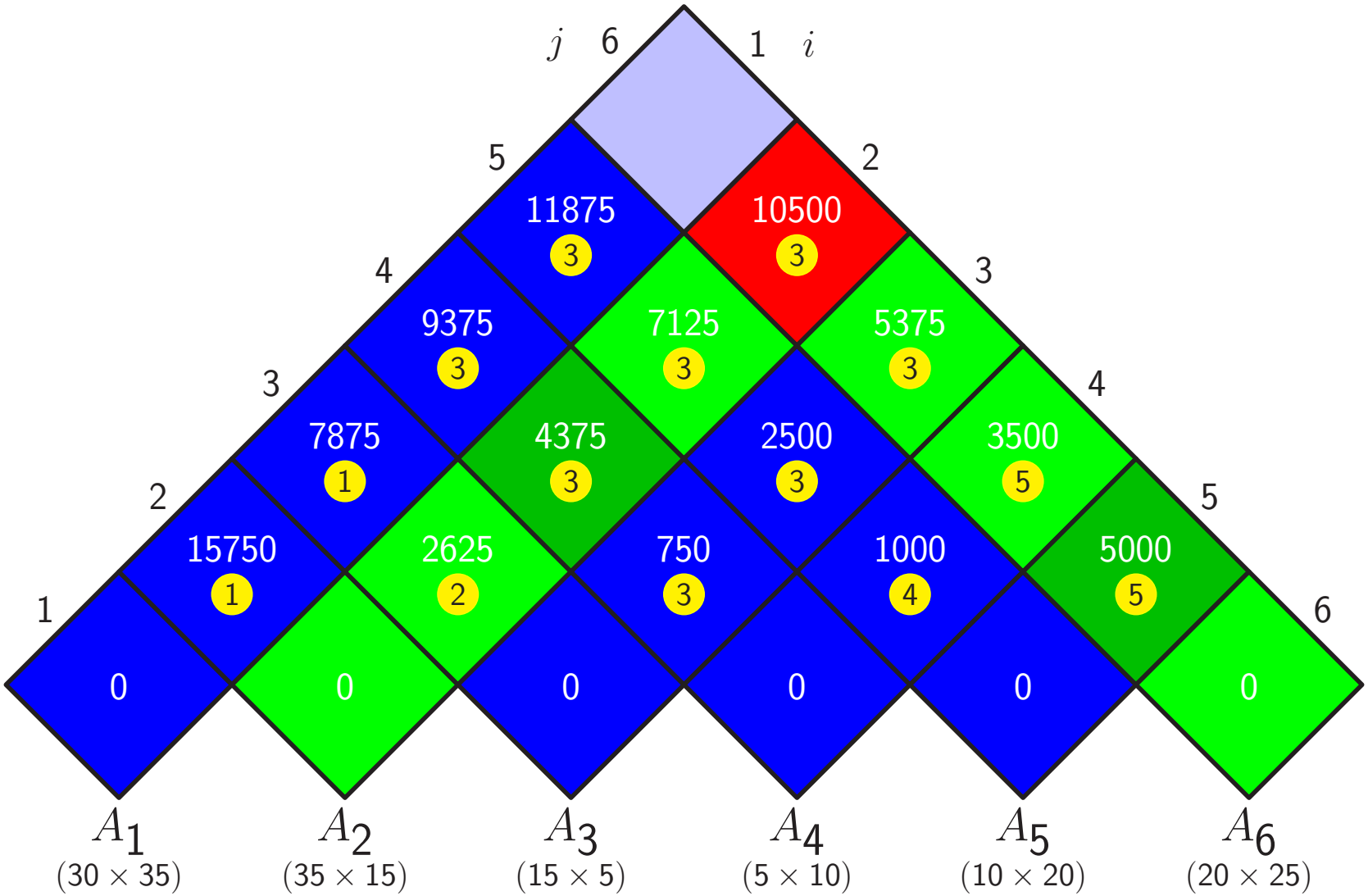
$$0 + 5375 + 35 \cdot 15 \cdot 25 = 18500$$

Beispiel (Forts.)



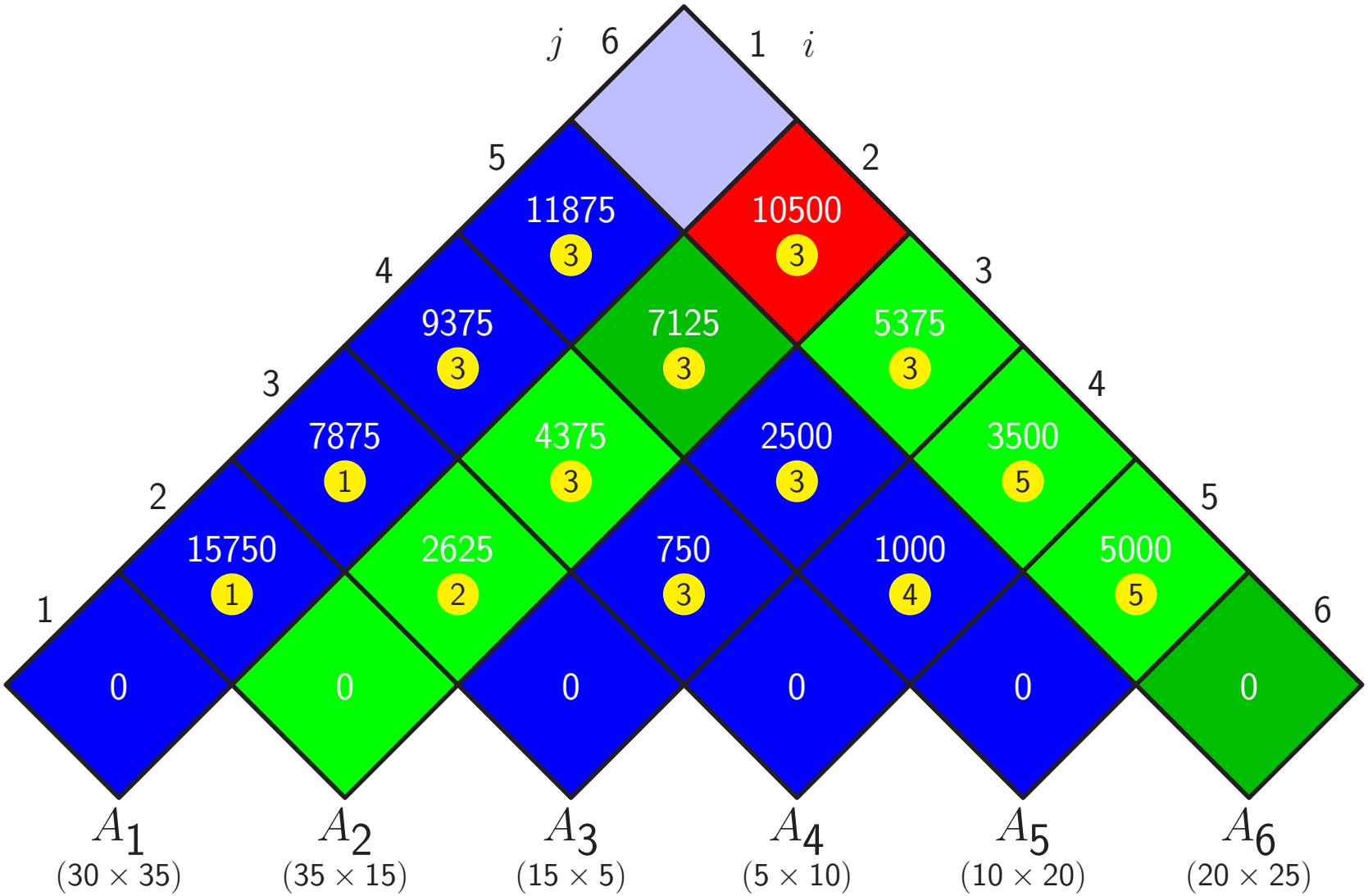
$$2625 + 3500 + 35 \cdot 5 \cdot 25 = 10500$$

Beispiel (Forts.)



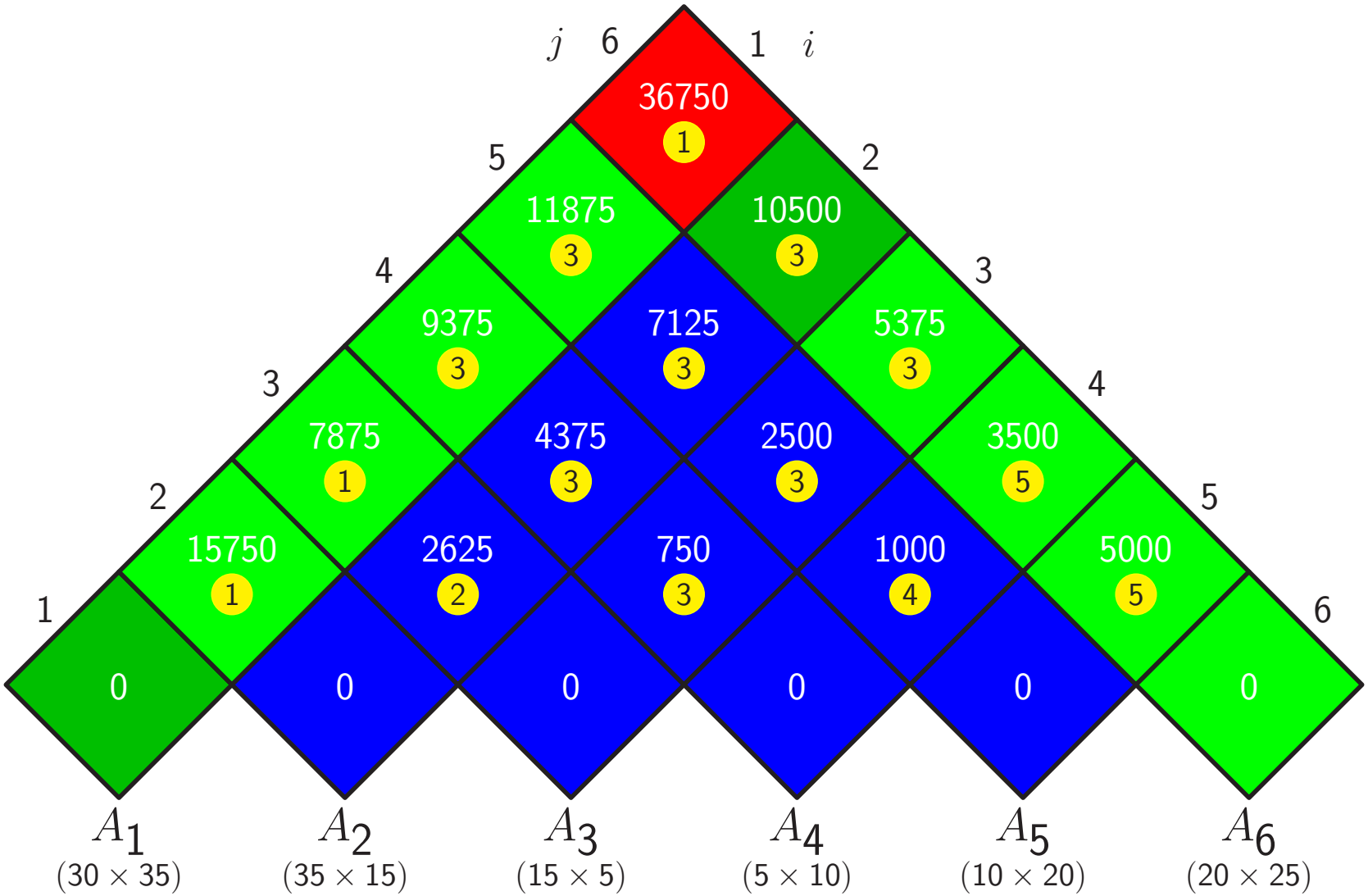
$$4375 + 5000 + 35 \cdot 10 \cdot 25 = 18125$$

Beispiel (Forts.)



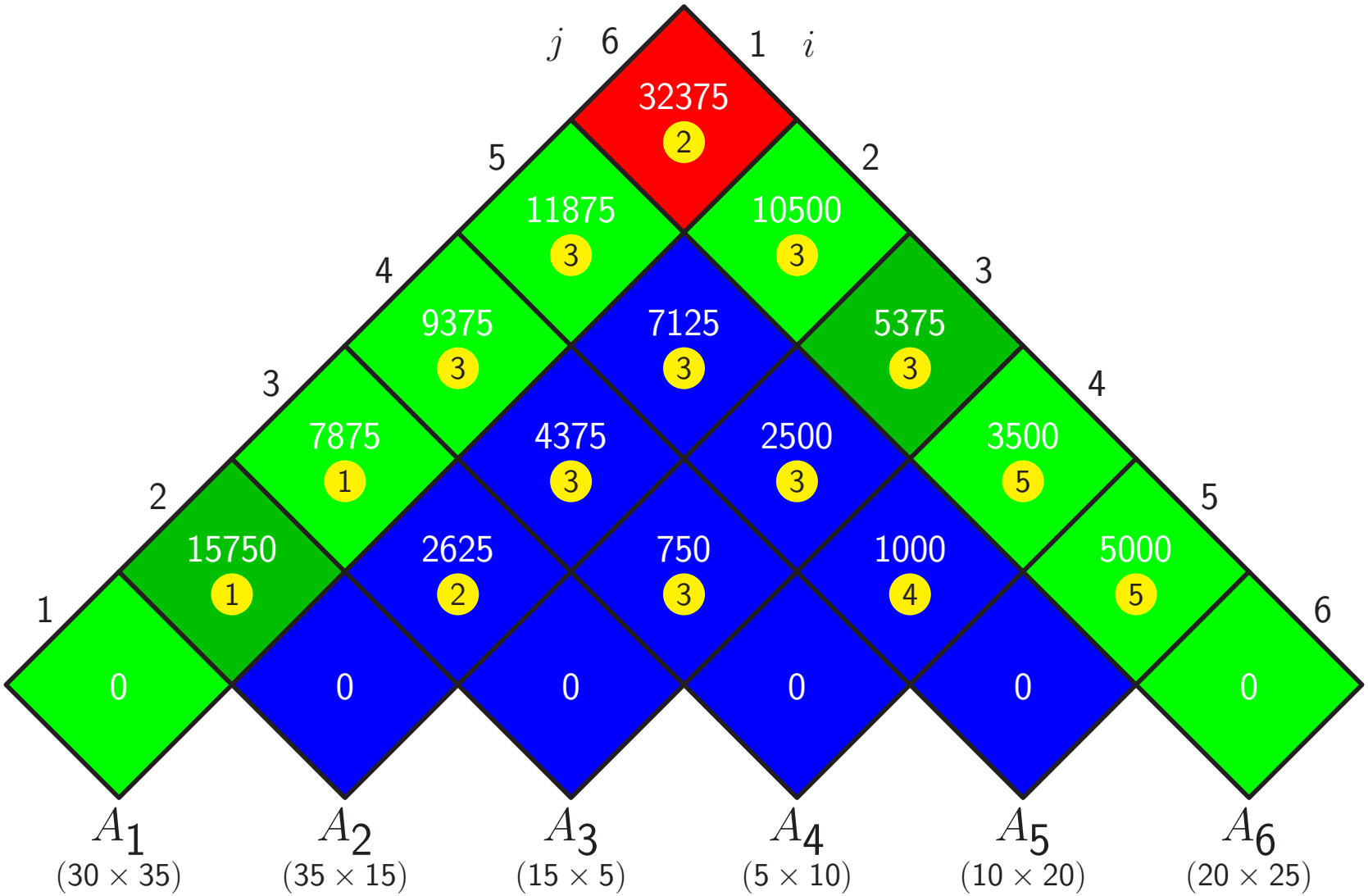
$$7125 + 0 + 35 \cdot 20 \cdot 25 = 24625$$

Beispiel (Forts.)



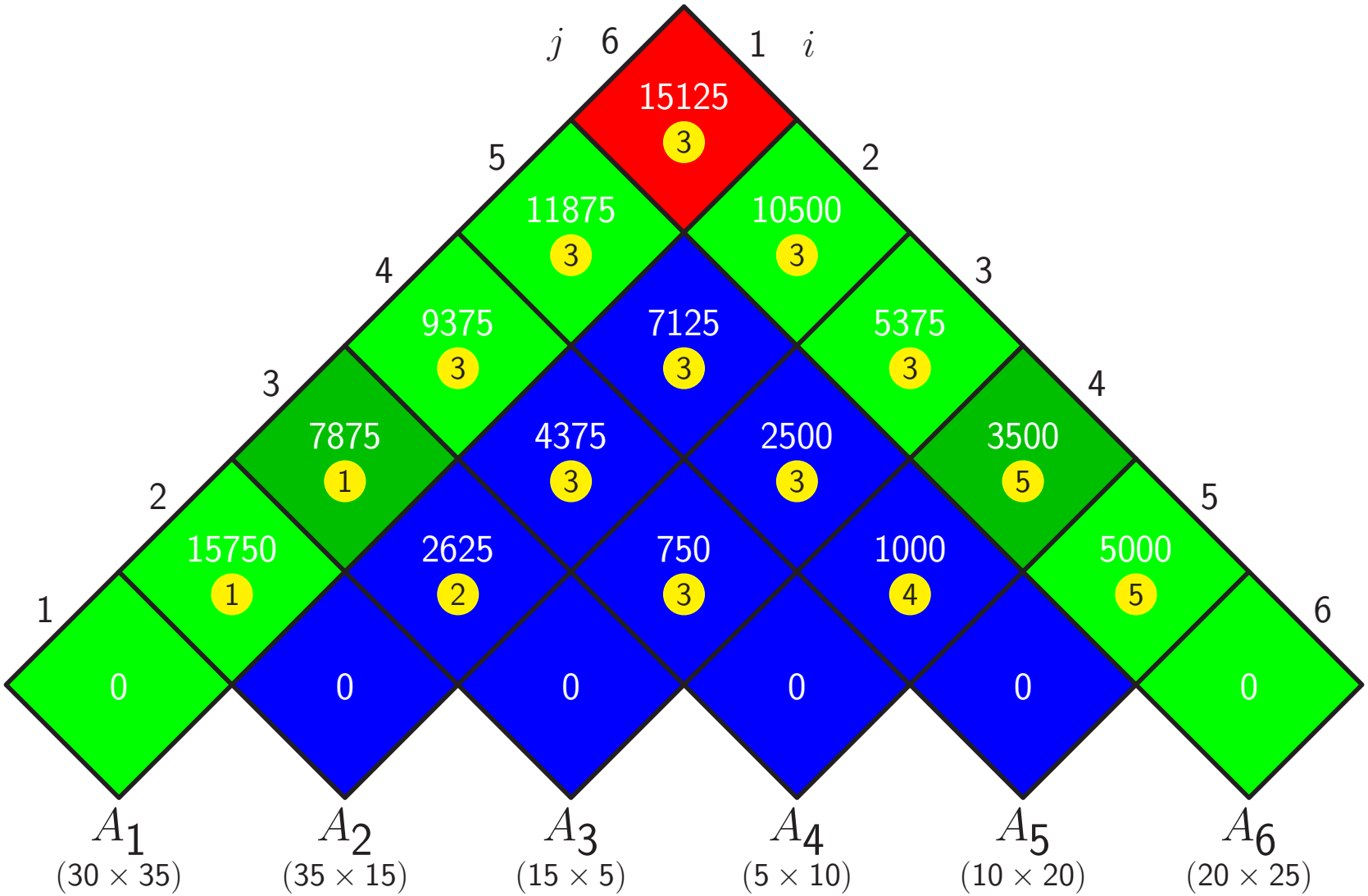
$$0 + 10500 + 30 \cdot 35 \cdot 25 = 36750$$

Beispiel (Forts.)



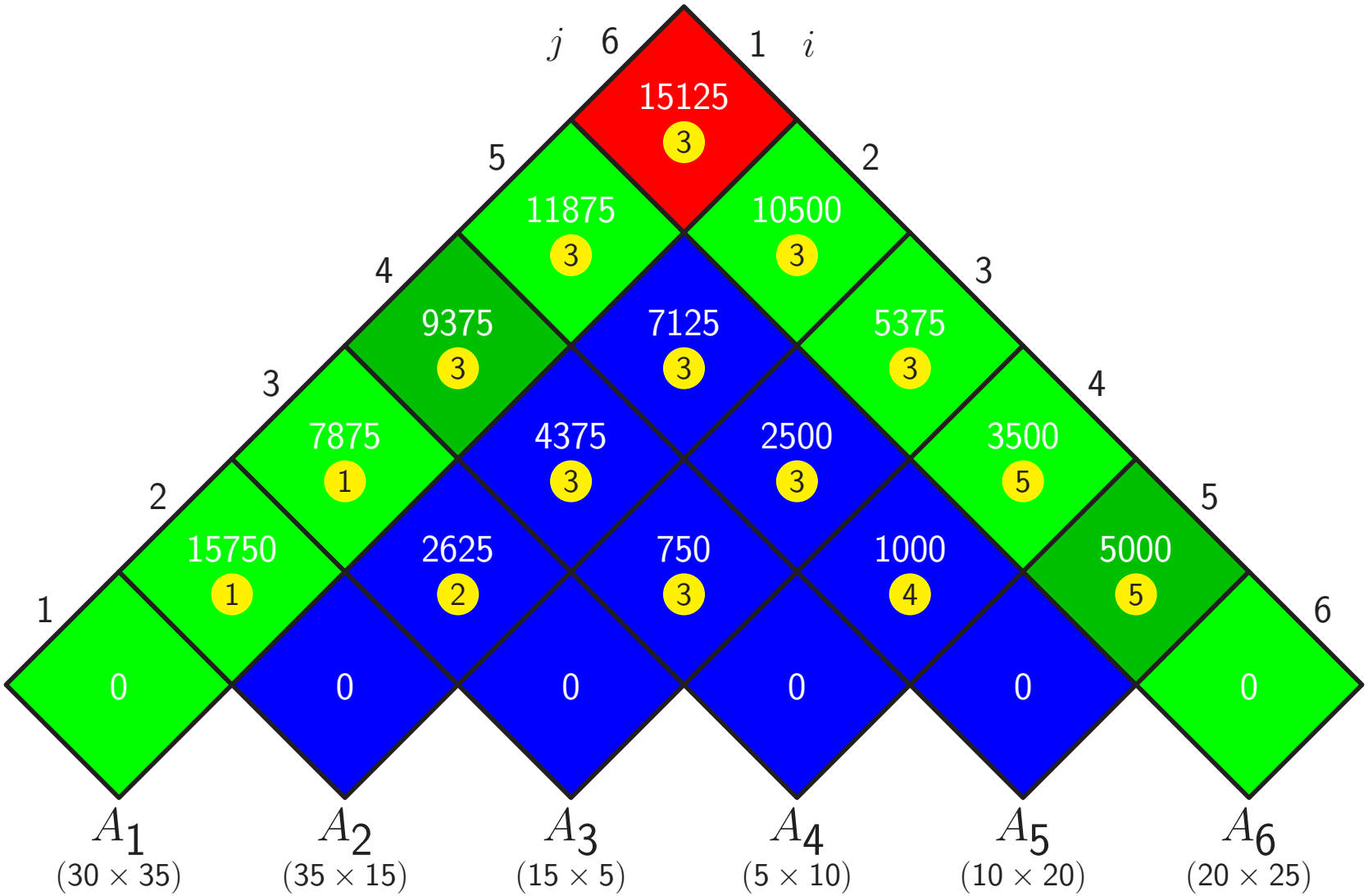
$$15750 + 5375 + 30 \cdot 15 \cdot 25 = 32375$$

Beispiel (Forts.)



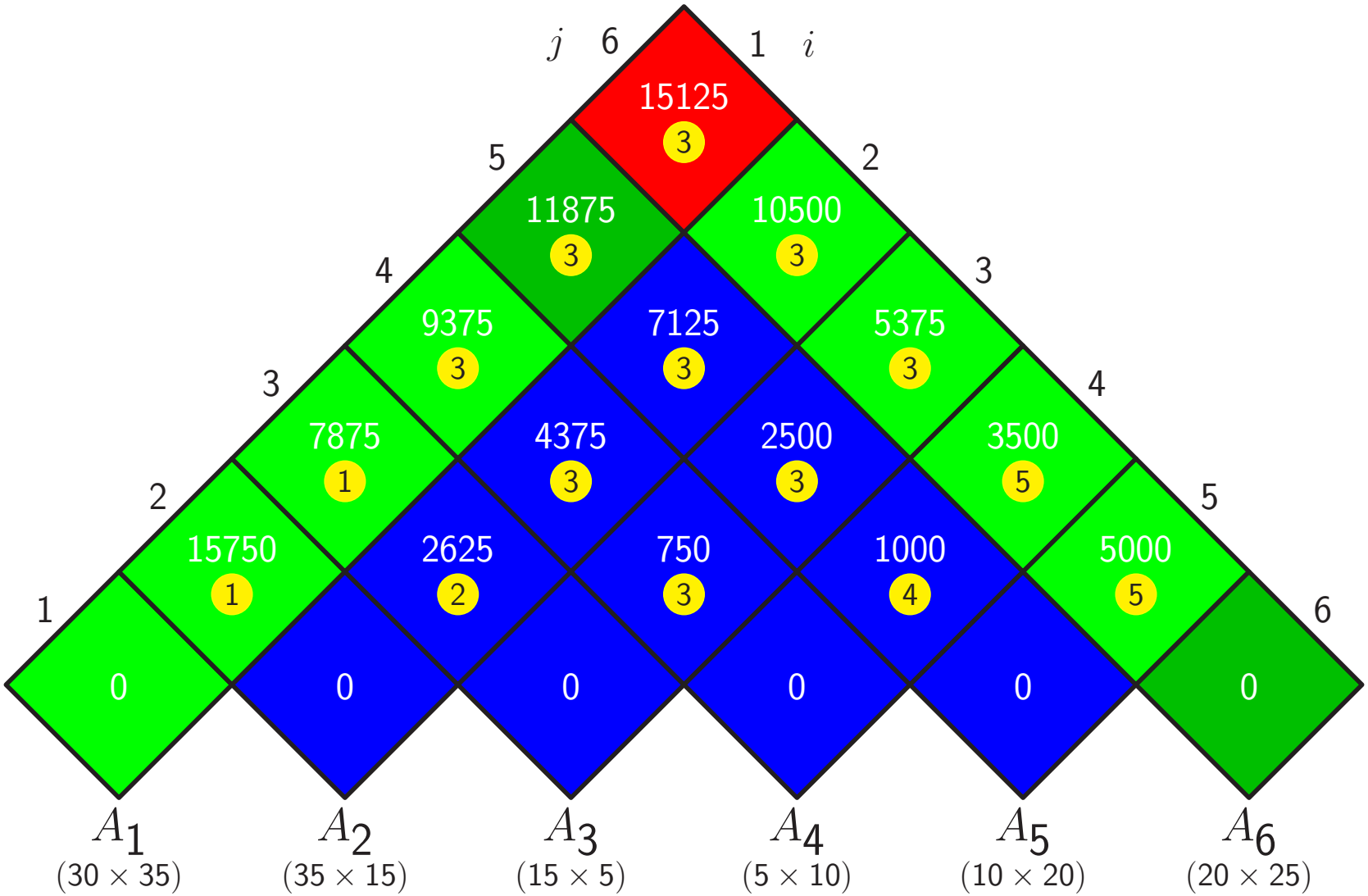
$$7875 + 3500 + 30 \cdot 5 \cdot 25 = 15125$$

Beispiel (Forts.)



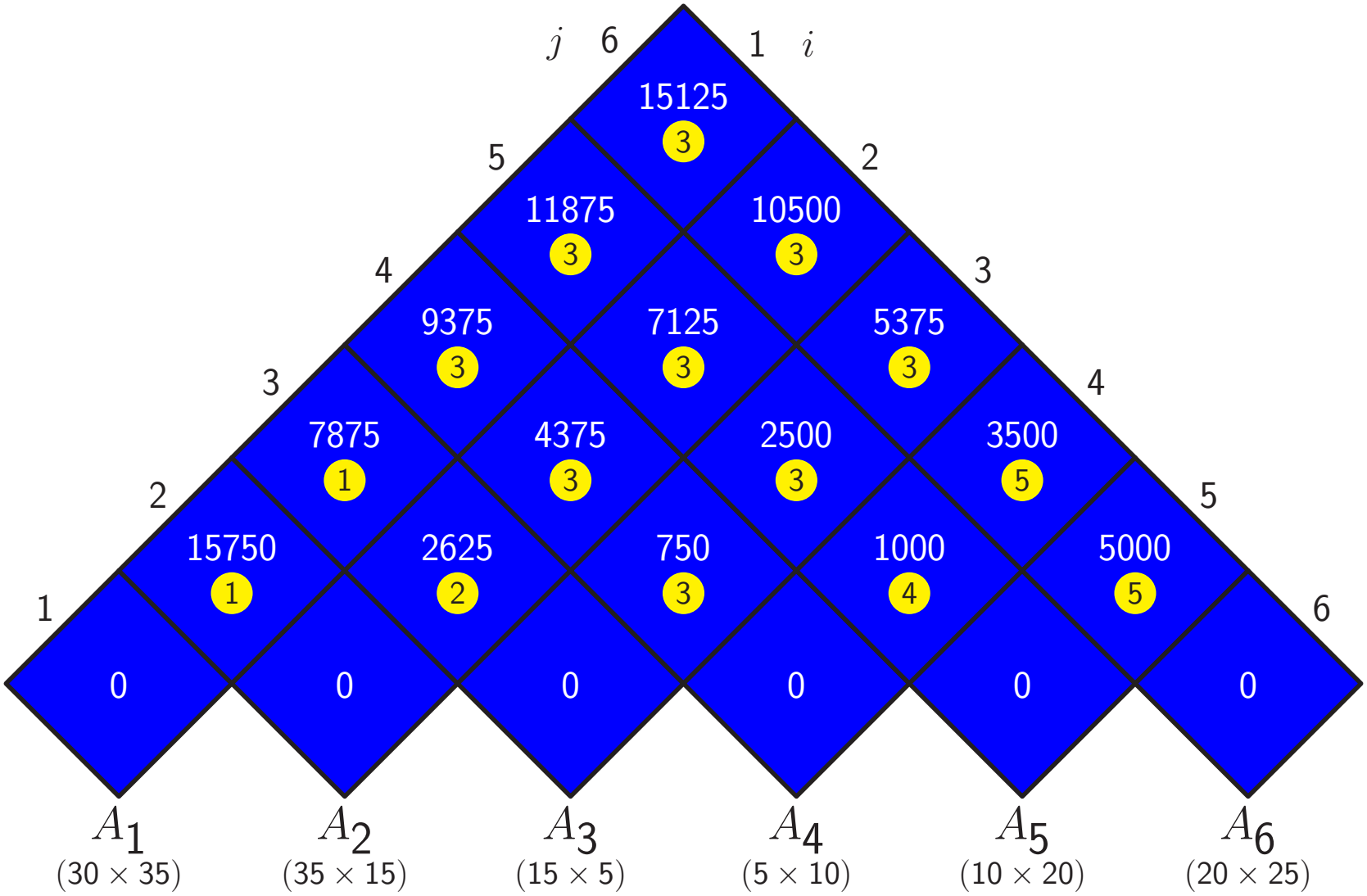
$$9375 + 5000 + 30 \cdot 10 \cdot 25 = 21875$$

Beispiel (Forts.)



$$11875 + 0 + 30 \cdot 20 \cdot 25 = 26875$$

Beispiel (Forts.)



Beispiel (Forts.)

Berechnung der optimaler Klammerung:

$$
\begin{aligned}
A[1..6] &= (A[1..3])(A[4..6]) \quad \text{da s[1,6]=3} \\
&= ((A[1])(A[2..3]))(A[4..6]) \quad \text{da s[1,3]=1} \\
&= ((A[1])((A[2])(A[3])))(A[4..6]) \quad \text{da s[2,3]=2} \\
&= ((A[1])((A[2])(A[3])))((A[4..5])(A[6])) \quad \text{da s[4,6]=5} \\
&= ((A[1])((A[2])(A[3])))(((A[4])(A[5]))(A[6])) \quad \text{da s[4,5]=4}
\end{aligned}
$$

Bemerkung: $A[i..j]$ steht für $A_i \cdot \ldots \cdot A_j$

Optimale Klammerung: $((A_1(A_2A_3))((A_4A_5)A_6))$

Anwendbarkeit von dynamischem Programmieren

Ein Optimierungsproblem ist mittels dynamischem Programmieren effizient lösbar, wenn es zwei Eigenschaften besitzt:

- Optimale Teilstruktur: Die optimale Lösung eines Problems enthält optimale Lösungen für die im Problem enthaltenen Teilprobleme
- Überlappende Teilprobleme: Die Menge der Teilprobleme zur rekursiven Berechnung der optimalen Lösung ist klein, d.h., polynomial in der Größe des Problems

Zusammenfassung

- Dynamisches Programmieren ist eine Technik zur Bearbeitung von Optimierungsproblemen
- Die Technik besteht darin, eine Tabelle mit Teillösungen zu berechnen und auf Basis dieser eine optimale Lösung zu ermitteln
- Dynamisches Programmieren eignet sich für Optimierungsprobleme mit der "Optimale Teilstruktur" Eigenschaft
- Dynamisches Programmieren wird auch als Heuristik für schwer zu handhabende Optimierungsprobleme eingesetzt