# Algorithmen und Datenstrukturen 2

## Lerneinheit 2: Hashing

Prof. Dr. Christoph Karg

Studiengang Informatik
Hochschule Aalen


Sommersemester 2016

8.4.2015



# Einleitung

Das Thema dieser Lerneinheit ist Hashing, einer Technik zur Speicherung von Datensätzen mit Zugriffsschlüsseln.

Die Lerneinheit gliedert sich in folgende Teile:

- Begriffsdefinitionen
- Hashing mit direkter Adressierung
- Hashing mit Chaining
- Hashing mit Open Addressing

# Welche Daten werden verarbeitet?

Die zu verarbeitenden Elemente bestehen aus:

- Schlüssel/Key: Identifikation des Datensatzes
- Satellitendaten: Weitere zum Datensatz gehörende Informationen

Für ein Element $x$ bezeichnet $key(x)$ den zugehörigen Schlüssel

**Beispiel:**

- Online Katalog $\rightsquigarrow$ Schlüssel: Bestellnummer
- Personaldatenbank $\rightsquigarrow$ Schlüssel: Personalnummer
- KFZ Datenbank $\rightsquigarrow$ Schlüssel: Autokennzeichen
- Cache im Webbrowser $\rightsquigarrow$ Schlüssel: URL





# Bereitzustellende Operationen

Modifikationen:

- $\textsc{Insert}(T,x)$: Füge dem Datensatz $x$ mit Schlüssel $key(x)$ in die Hashing Datenstruktur $T$ ein
- $\textsc{Delete}(T,x)$: Entferne den Datensatz $x$ mit Schlüssel $key(x)$ aus der Hashing Datenstruktur $T$

Anfrage:

- $\textsc{Search}(T,k)$: Suche in der Hashing Datenstruktur $T$ nach einem Datensatz mit dem Schlüssel $k$

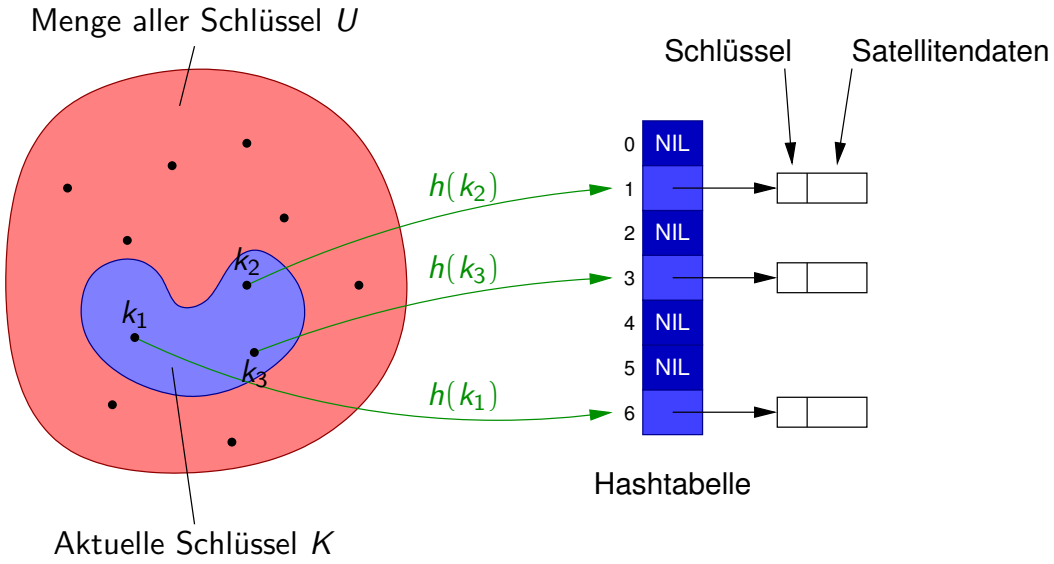
# Hashtabellen

- Verallgemeinerung von Arrays
- Idee: Berechne Index im Array anhand des Schlüssels
- Ideal, falls die Anzahl der zu speichernden Schlüssel vergleichsweise klein zur Anzahl der möglichen Schlüssel
- Laufzeit
  - ▷ Schlechtes Worst Case Verhalten: $O(n)$
  - ▷ Sehr gutes Average Case Verhalten: $O(1)$
- Hashing Verfahren:
  - ▷ Direkte Adressierung
  - ▷ Hashing mit Chaining
  - ▷ Hashing mit Open Addressing



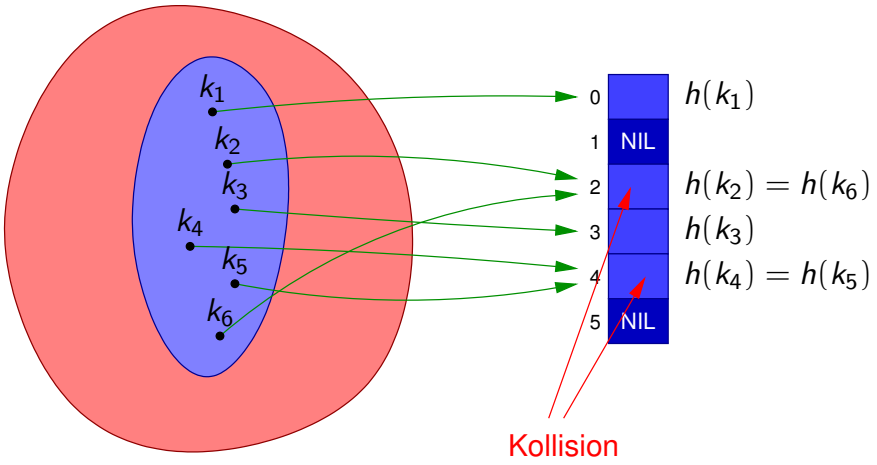


# Idee hinter Hashing



# Hashing

Idee: Speichere die Schlüssel in einer Tabelle, die deutlich kleiner als $\|U\|$ ist




**Problem:** Kollisionen





# Definitionen zum Thema Hashing

- Das Universum $U$ ist die Menge aller möglichen Schlüssel.
- Die Menge der aktuell gespeicherten Schlüssel ist $K$
- Eine Hashtabelle ist ein Array $T[0..m-1]$ der Dimension $m > 0$. Die Elemente des Arrays nennt man Slots
- Eine Hashfunktion ist eine Abbildung

$$h : U \mapsto \{0, 1, \ldots, m-1\}$$

- $h(key(x))$ ist der Hashwert des Datensatzes $x$
- Kurzschreibweise: $h(x)$ ist synonym mit $h(key(x))$
- Eine Kollision tritt auf, wenn zwei verschiedene Elemente $x$ und $y$ denselben Hashwert haben, d.h., wenn $h(x) = h(y)$ gilt

# Direkte Adressierung

- Idee: Benutze die Schlüssel $\{0, 1, \ldots, m-1\}$ direkt als Index in der Hashtabelle $T$
- Direkt mit einem Array realisierbar
- Voraussetzungen:
  - ▷ Universum $U$ ist vergleichsweise klein
  - ▷ Alle Elemente haben paarweise verschiedene Schlüssel
- Hashfunktion $h : U \mapsto U$ mit $h(k) = k$
- Vorteil: Die Laufzeit der Operationen INSERT, DELETE und SEARCH haben eine Worst Case Laufzeit von $O(1)$.
- Nachteil: Die Größe der Hashtabelle ist linear in $\|U\|$.





# Direkte Adressierung (Forts.)

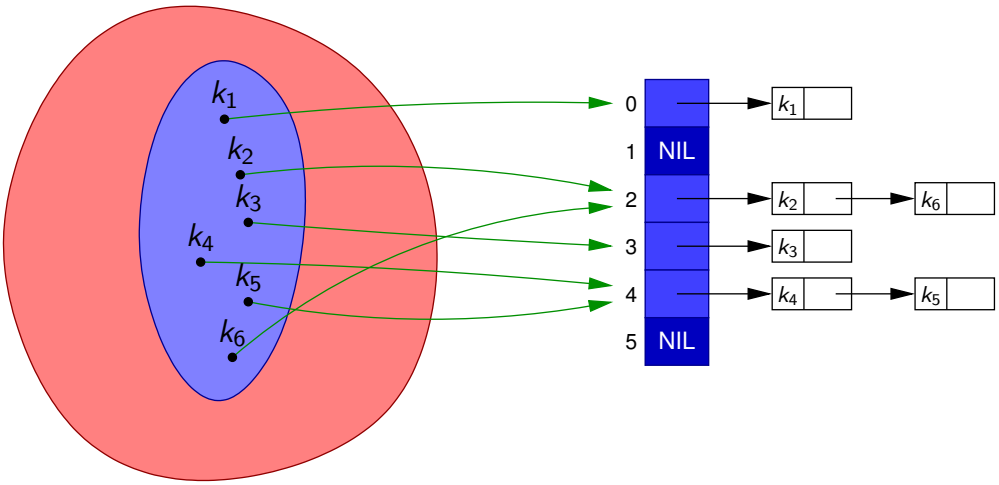
DIRECTADDRESSSEARCH$(T, k)$
1 **return** $T[k]$

DIRECTADDRESSINSERT$(T, x)$
1 $T[key(x)] := x$

DIRECTADDRESSDELETE$(T, x)$
1 $T[key(x)] :=$ `NIL`

# Kollisionsbehandlung mittels Verkettung

Idee: Elemente mit demselben Schlüssel werden in einer verketteten Liste gespeichert $\rightsquigarrow$ Hashing mit Verkettung (Chaining)








# Algorithmen für Verkettung

ChainedHashSearch$(T, x)$

1 *Suche nach einem Element mit Schlüssel* $k = key(x)$ *in Liste* $T[h(k)]$

ChainedHashInsert$(T, x)$

1 *Füge* $x$ *mit Schlüssel* $k = key(x)$ *am Anfang der Liste* $T[h(k)]$ *ein*

ChainedHashDelete$(T, x)$

1 *Lösche* $x$ *aus der Liste* $T[h(k)]$

# Beispiel für Verkettung

Hashfunktion: $h(x) = x \bmod 7$

Hashtabelle mit 7 Slots:

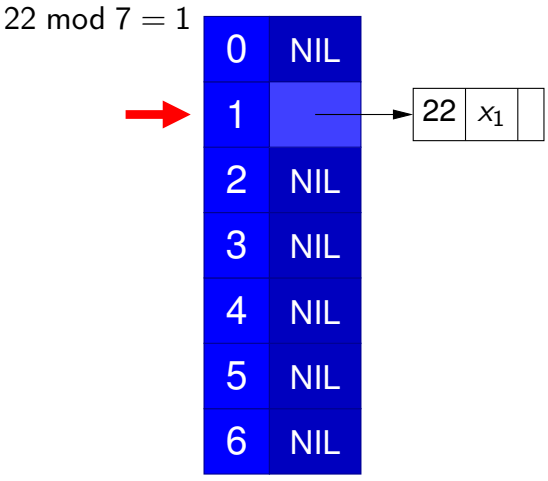
| | |
|---|---|
| 0 | NIL |
| 1 | NIL |
| 2 | NIL |
| 3 | NIL |
| 4 | NIL |
| 5 | NIL |
| 6 | NIL |





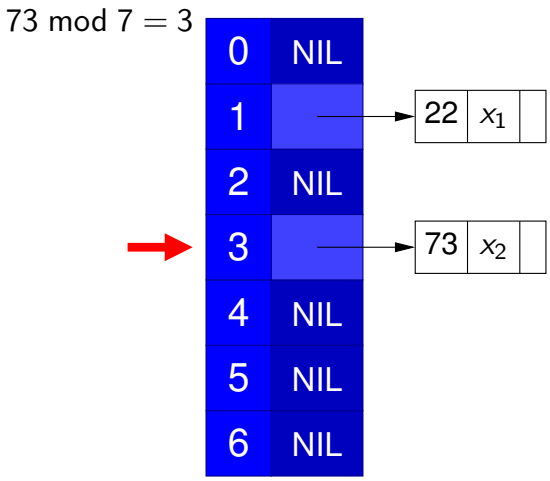
# Beispiel für Verkettung (Forts.)

Einfügen des Elements $x_1$ mit $key(x_1) = 22$



# Beispiel für Verkettung (Forts.)

Einfügen des Elements $x_2$ mit $key(x_2) = 73$

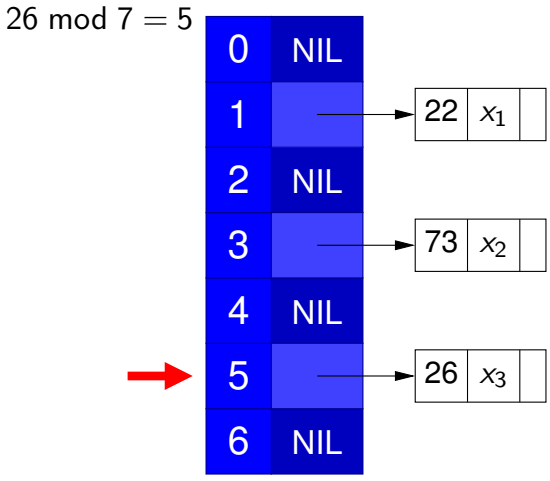






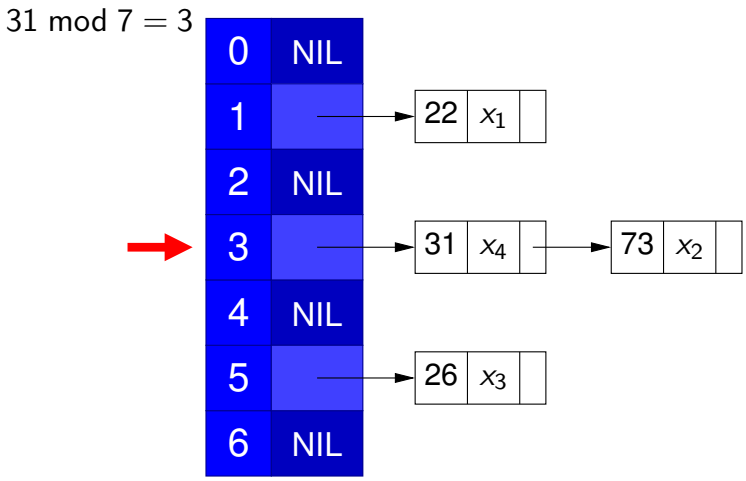

# Beispiel für Verkettung (Forts.)

Einfügen des Elements $x_3$ mit $key(x_3) = 26$



# Beispiel für Verkettung (Forts.)

Einfügen des Elements $x_4$ mit $key(x_4) = 31$

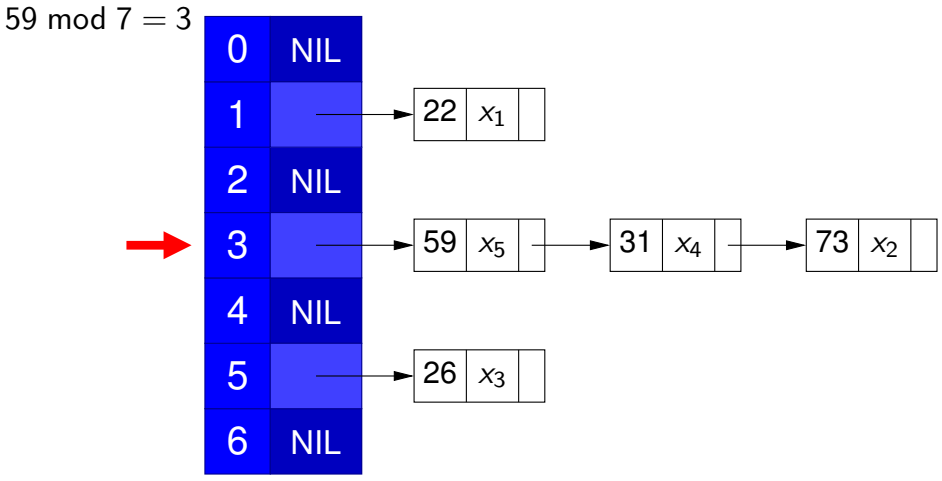






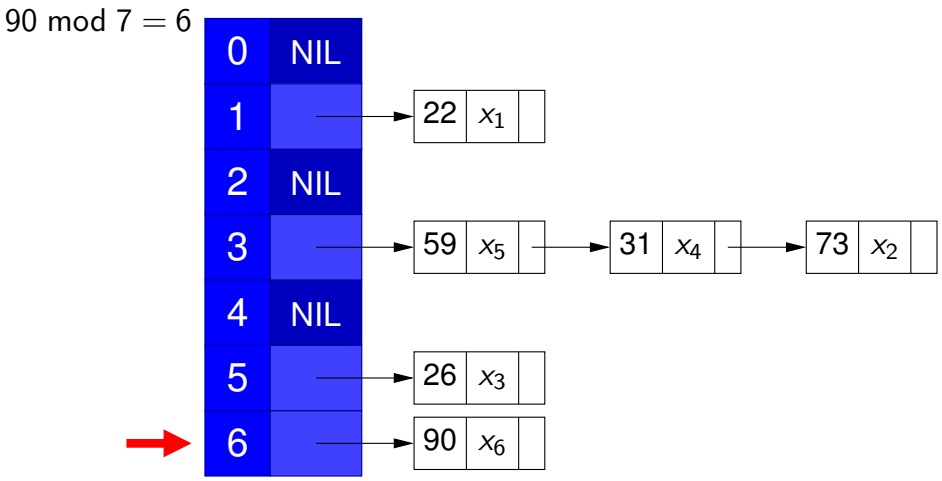

# Beispiel für Verkettung (Forts.)

Einfügen des Elements $x_5$ mit $key(x_5) = 59$



# Beispiel für Verkettung (Forts.)

Einfügen des Elements $x_6$ mit $key(x_6) = 90$

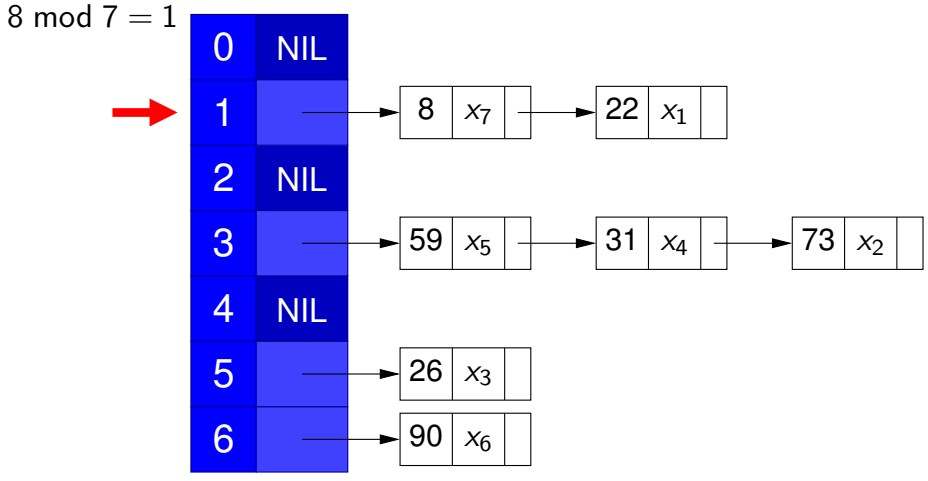






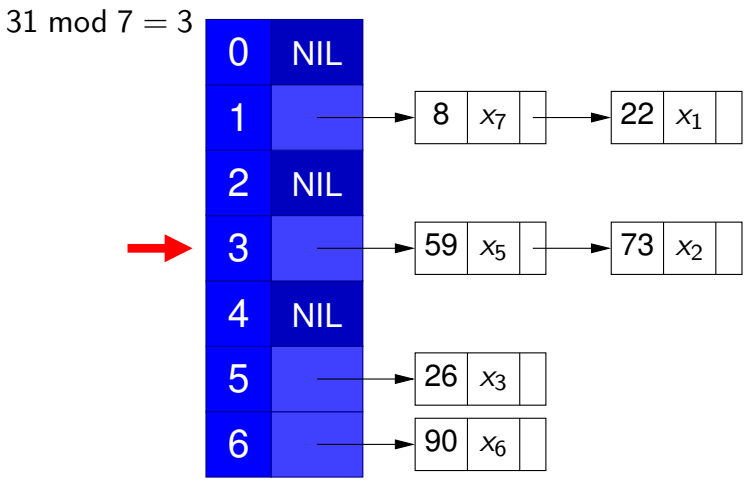

# Beispiel für Verkettung (Forts.)

Einfügen des Elements $x_7$ mit $key(x_7) = 8$



# Beispiel für Verkettung (Forts.)

Löschen des Elements $x_4$ mit $key(x_4) = 31$








# Worst Case Analyse

Annahmen:

- Die Tabelle $T$ enthält $n$ Elemente.
- Die Berechnung von $h$ und der Tabellenzugriff erfolgen in Zeit $O(1)$.

Schlimmster Fall: Alle Elemente wurden in einen Slot gehasht $\rightsquigarrow$ verkettete Liste mit $n$ Elementen

- $\textsc{Search}(T, x)$: Das gesuchte Element $x$ ist am Ende der Liste. Laufzeit: $O(n)$.
- $\textsc{Insert}(T, x)$: Die Laufzeit ist $O(1)$, da $x$ am Anfang der Liste $T[h(key(x))]$ eingefügt wird.
- $\textsc{Delete}(T, x)$: Das Element wird zuerst in der Tabelle gesucht und dann aus der Liste gelöscht. Laufzeit: $O(n)$.

## Belegungsfaktor einer Hashtabelle

Gegeben ist eine Hashtabelle $T$ mit $m$ Slots.

Der Belegungsfaktor $\alpha$ von $T$ ist die mittlere Anzahl von Elementen pro Slot.

**Fakt:** Falls $T$ $n$ Elemente enthält, dann ist

$$\alpha = \frac{n}{m}$$





## Simple Uniform Hashing

Unter Simple Uniform Hashing versteht man die folgende Annahme:

> *Ein Element $x$ wird mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{m}$ in den Slot $j$ gehasht, unabhängig von der Platzierung der anderen Elemente.*

Mit $n_j$ wird die Anzahl der Elemente in Slot $j$ bezeichnet, wobei $j = 0, 1, \ldots, m-1$. Es gilt:

$$n = n_0 + n_1 + \ldots + n_{m-1}.$$

Erwartungswert von $n_j$:

$$E[n_j] = \frac{n}{m} = \alpha$$

## Analyse einer nicht erfolgreichen Suche

**Satz.** Bei Hashing mit Verkettung ist die durchschnittliche Laufzeit einer nicht erfolgreichen Suche gleich $\Theta(1+\alpha)$, falls die Simple Uniform Hashing Annahme gilt.

**Beweis.** Betrachte eine Hashtabelle $T$ mit $n$ Einträgen und ein Element $x$ mit einem Schlüssel $k = key(x)$, der nicht in $T$ enthalten ist.

- Es ist $h(k) = j$ mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{m}$
- Die Liste in $T[j]$ wird während der Suche komplett durchlaufen, da $k$ nicht in ihr enthalten ist
- Die Länge der Liste $T[j]$ ist im Mittel $n_j = n/m = \alpha$
- Die Laufzeit setzt sich zusammen aus der Berechnung von $h$ und der Zeit zum Durchlaufen der Liste

Somit: Laufzeit $\Theta(1+\alpha)$





## Wahrscheinlichkeit einer Kollision

**Satz.** Falls die Simple Uniform Hashing Annahme gilt, dann ist die Wahrscheinlichkeit einer Kollision zweier Elemente in der Hashtabelle gleich $\frac{1}{m}$.

**Beweis:** Betrachte zwei Elemente $x$ und $y$. Es gilt:

$$\begin{aligned}
&\text{Prob}[h(key(x)) = h(key(y))] \\
&= \sum_{j=0}^{m-1} \text{Prob}[h(key(x)) = j \text{ und } h(key(y)) = j] \\
&= \sum_{j=0}^{m-1} \frac{1}{m} \cdot \frac{1}{m} \\
&= \frac{m}{m^2} = \frac{1}{m}
\end{aligned}$$

# Analyse einer erfolgreichen Suche

**Satz.** Bei Hashing mit Verkettung ist die durchschnittliche Laufzeit einer erfolgreichen Suche gleich $\Theta(1 + \alpha/2)$, falls die Simple Uniform Hashing Annahme gilt.

**Beweis.** Annahme: das zu suchende Element $x$ wird unter Gleichverteilung ausgewählt.

- Um $x$ zu finden, müssen alle Elemente untersucht werden, die in der Liste $T[h(key(x))]$ vor $x$ sind sowie das Element $x$ selbst.
- Die durchschnittliche Laufzeit ist linear in der Anzahl der Elemente, die nach $x$ in die Liste $T[h(key(x))]$ eingefügt wurden.

**Ziel:** Berechnung der zu erwartenden Anzahl dieser Elemente





# Analyse einer erfolgreichen Suche (Forts.)

Sei $x_i$ das $i$-te Element, das in die Hashtabelle eingefügt wird, wobei $i = 1, 2, \ldots, n$. Sei $k_i = key(x_i)$.

Für $k_i$ und $k_j$ ist die Zufallsvariable $X_{ij}$ wie folgt definiert:

$$X_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{falls } h(k_i) = h(k_j), \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Es gilt:

$$\begin{aligned} E[X_{ij}] &= 1 \cdot \text{Prob}[X_{ij} = 1] + 0 \cdot \text{Prob}[X_{ij} = 0] \\ &= \text{Prob}[X_{ij} = 1] \\ &= \frac{1}{m} \end{aligned}$$

# Analyse einer erfolgreichen Suche (Forts.)

Die Elemente, die nach $x_i$ in die Hashtabelle eingefügt wurden, sind $x_{i+1}, \ldots, x_n$.

Die zu erwartende Anzahl der zu untersuchenden Elemente bei einer Suche nach $x_i$ ist deshalb:

$$\begin{aligned} E\left[1 + \sum_{j=i+1}^{n} X_{ij}\right] &= 1 + \sum_{j=i+1}^{n} E[X_{ij}] \\ &= 1 + \sum_{j=i+1}^{n} \frac{1}{m} \end{aligned}$$





# Analyse einer erfolgreichen Suche (Forts.)

Aufwand für ein zufällig unter Gleichverteilung gezogenes Element $x_i$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(1 + \sum_{j=i+1}^{n}\frac{1}{m}\right) &= \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} 1 + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i+1}^{n}\frac{1}{m}\right) \\ &= 1 + \frac{1}{nm}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i+1}^{n} 1 \\ &= 1 + \frac{1}{nm}\sum_{i=1}^{n}(n-i) \\ &= 1 + \frac{1}{nm}\left(\sum_{i=1}^{n} n - \sum_{i=1}^{n} i\right) \end{aligned}$$

# Analyse einer erfolgreichen Suche (Forts.)

$$
\begin{aligned}
1 + \frac{1}{nm}\left(\sum_{i=1}^{n} n - \sum_{i=1}^{n} i\right) &= 1 + \frac{1}{nm}\left(n^2 - \frac{n(n+1)}{2}\right) \\
&= 1 + \frac{1}{nm} \cdot \frac{n^2 - n}{2} \\
&= 1 + \frac{n-1}{2m} \\
&= 1 + \frac{\alpha}{2} - \frac{\alpha}{2n}
\end{aligned}
$$

Somit: Average Case Laufzeit einer erfolgreichen Suche:

$$\Theta(1 + \alpha/2 - \alpha/2n) = \Theta(1 + \alpha/2)$$





# Auswahl der Hashfunktion

- Wünschenswert: Hashfunktion erfüllt die Simple Uniform Assumption
- Problem: Verteilung der Eingaben ist nicht bekannt
- Lösung: Einsatz von Heuristiken $\rightsquigarrow$ Wähle eine Hashfunktion, die sich in der Praxis bewährt hat
- Konstruktion von Hashfunktionen mittels
  - Divisionsmethode
  - Multiplikationsmethode

## Divisionsmethode

- Universum $U = \mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$
- Größe der Hashtabelle $m > 0$
- Hashfunktion $h(k) = k \bmod m$
- Modul $m$ muss "geschickt" gewählt werden:
  - ▷ Schlecht: Zweierpotenz $m = 2^p$, $p \in \mathbb{N}$
  - ▷ Gut: Primzahl, die "nicht zu nahe an" einer Zweierpotenz liegt





## Multiplikationsmethode

Verfahren: Berechnung des Hashwerts $h(k)$ in zwei Schritten:

1. Multipliziere $k$ mit einer Konstante $A$, wobei $0 < A < 1$
2. Multipliziere die Nachkommastellen von $k \cdot A$ mit $m$, d.h., berechne $\lfloor (k \cdot A - \lfloor k \cdot A \rfloor) m \rfloor$

Bemerkungen:

- die Wahl der Tabellengröße $m$ ist unkritisch
- Die Wahl von $A$ ist ebenfalls unkritisch. Es gibt jedoch Werte die besser funktionieren als andere

Empfehlung von Knuth: Goldener Schnitt

$$A = (\sqrt{5} - 1)/2 = 0.6180339887\ldots$$

# Beispiel Multiplikationsmethode

Wähle $m = 1024$ und $A = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

Der Schlüssel $k = 15341$ wird gehasht auf:

$$\begin{aligned} h(15341) &= \left\lfloor \left( 15341 \cdot \frac{\sqrt{5}-1}{2} - \left\lfloor 15341 \cdot \frac{\sqrt{5}-1}{2} \right\rfloor \right) \cdot 1024 \right\rfloor \\ &\approx \lfloor (9481.259421 - 9481) \cdot 1024 \rfloor \\ &= 265 \end{aligned}$$

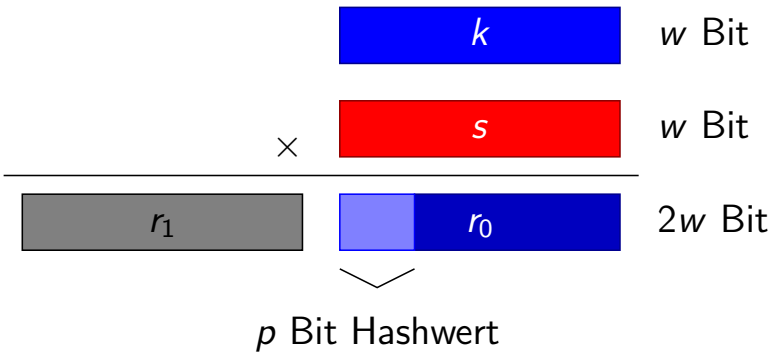




# Berechnung mit Ganzzahlarithmetik

Annahme: Tabellengröße $m = 2^p$, Wortlänge $w$, d.h., Schlüssel $k$ ist eine $w$-Bit Zahl

Berechnung von $h(k)$: Wähle ganze Zahl $0 < s < 2^w$ und definiere $A = \frac{s}{2^w}$



## Berechnung mit Ganzzahlarithmetik (Forts.)

Führe zur Berechnung von $h(k)$ folgende Schritte aus:

- Berechne $r = k \cdot s$ (dies ist eine $2w$-Bit Zahl)
- Zerlege $r$ in zwei $w$-Bit Wörter $r_0$, $r_1$ derart, dass $r = r_1 \cdot 2^w + r_0$
- Wähle die $p$ höchstwertigsten Bits von $r_0$ als Hashwert $h(k)$

Bemerkung: Aufgrund von Rundungsfehlern weicht das Ergebnis in der Regel von der exakten Berechnung ab





## Zur Illustration ein Beispiel

Gegeben: Wortlänge 16 Bit, $m = 2^{10} = 1024$

Wähle $s$ so, dass $|s/2^{16} - (\sqrt{5}-1)/2|$ minimal:

$$s = \lceil 2^{16} \cdot (\sqrt{5}-1)/2 \rceil = 40503$$

Somit ist $A = \frac{40503}{65536} = 0.6180267333\ldots$

Berechnung des Hashwerts von $k = 15341$:

$$r = 40503 \cdot 15341 = 621356523 = 9481 \cdot 2^{16} + 9707$$

Binärdarstellung von $r_0 = 9707$: $\underbrace{0010010111}_{=h(k)}\ 101011$

Ergebnis: $h(15341) = 151$

# Konvertierung von Zeichenketten

Gegeben: Alphabet $\Sigma = \{a_0, a_1, \ldots, a_{b-1}\}$

Aufgabe: Konvertiere ein Wort $x = x_1 \ldots x_n \in \Sigma^n$ in eine natürliche Zahl

Idee: Interpretiere $x$ als Zahl $1x$ zur Basis $b = \|\Sigma\|$ und konvertiere diese ins Dezimalsystem

Formel:

$$d = b^n + \sum_{i=1}^{n} val(x_i) \cdot b^{n-i}$$

wobei $val : \Sigma \mapsto \{0, 1, \ldots, b-1\}$ eine bijektive Abbildung ist





# Beispiel zur Konvertierung von Zeichenketten

- $\Sigma = \{\mathtt{a}, \mathtt{b}, \mathtt{c}, \mathtt{d}\}$
- Bijektive Abbildung:

| $x$ | a | b | c | d |
|---|---|---|---|---|
| $val(x)$ | 0 | 1 | 2 | 3 |

- Konvertierung von $x = \mathtt{cbad}$:

$$\begin{aligned} & 4^4 + \sum_{i=1}^{4} b^{4-i} val(x_i) = \\ &= 4^4 + 4^3 \cdot val(\mathtt{c}) + 4^2 \cdot val(\mathtt{b}) + 4^1 \cdot val(\mathtt{a}) + 4^0 \cdot val(\mathtt{d}) \\ &= 256 + 64 \cdot 2 + 16 \cdot 1 + 4 \cdot 0 + 1 \cdot 3 \\ &= 403 \end{aligned}$$

# Open Addressing

- Idee: Alle Elemente werden direkt in der Hashtabelle gespeichert
- Vorteil: es ist kein zusätzlicher Speicherplatz für verkettete Listen notwendig.
- Nachteil: Kapazität der Tabelle ist begrenzt. D.h., der Belegungsfaktor $\alpha$ immer $\leq 1$
- Die Suche nach einem freien Slot erfolgt durch sogenanntes Probing. Es werden die Slots der Reihe nach sondiert, bis ein freier Slot gefunden wird
- Die Sondierungsreihenfolge hängt vom einzufügenden Schlüssel $k$ ab





# Berechnen der Sondierungssequenz

- Hashfunktion bei Tabellengröße $m$:

$$h : U \times \{0, 1, \ldots, m-1\} \mapsto \{0, 1, \ldots, m-1\}$$

- Sondierungssequenz (probe sequence) für Schlüssel $k$:

$$\langle h(k, 0), h(k, 1), \ldots, h(k, m-1) \rangle$$

- Bedingung: Sondierungssequenz muss eine Permutation von $\langle 0, 1, \ldots, m-1 \rangle$ sein.

## Einfügen eines Elements

```
HashInsert(T, k)
1   i := 0
2   repeat
3     j := h(k, i)
4     if T[j] = NIL then
5       T[j] := k
6       return j
7     else
8       i := i + 1
9   until i = m
10  print "Hash table overflow"
```





## Suche nach einem Element

```
HashSearch(T, k)
1   i := 0
2   repeat
3     j := h(k, i)
4     if T[j] = k then
5       return j
6     i := i + 1
7   until T[j] = NIL or i = m
8   return NIL
```

## Löschen eines Elements

**Vorsicht:** Löschen von Slot $j$ durch die Zuweisung $T[j] = \texttt{NIL}$ verhindert das Finden von Elementen, bei denen Slot $j$ als belegt sondiert wurde.

Lösung:

- Markiere einen gelöschten Slot mit DELETE anstatt mit `NIL`.
- Passe die Prozedur HashInsert so an, dass Elemente auch in mit DELETE markierte Felder eingefügt werden.

**Bemerkung:** Bei Einsatz obiger Variante hängt die Laufzeit von HashSearch nicht mehr von Belegungsfaktor $\alpha$ ab.





## Linear Probing

Ziel: Berechnung einer geeigneten Sondierungssequenz

Idee: Setze eine zusätzliche Hashfunktion $h' : U \mapsto \{0, 1, \ldots, m-1\}$ ein

Linear Probing: Für $i = 0, 1, \ldots, m-1$ ist

$$h(k, i) = (h'(k) + i) \bmod m$$

**Bemerkungen:**

- Linear Probing ist einfach zu implementieren.
- Das Primary Clustering Problem erhöht die mittlere Suchzeit.

# Quadratic Probing

Einsatz einer Hashfunktion der Bauart

$$h(k,i) = (h'(k) + c_1 i + c_2 i^2) \bmod m$$

wobei $c_1$ und $c_2$ positive Konstanten sind

**Bemerkungen:**

- Die Sondierungswerte haben einen quadratischen Offset in Abhängigkeit von $i$
- Quadratic Probing ist besser als Linear Probing
- Nicht jede Kombination von $m$, $c_1$ und $c_2$ erfüllt die Permutationsbedingung
- Das Secondary Clustering Problem erhöht die mittlere Suchzeit





# Bestimmen der Parameter $c_1$ und $c_2$

Ausgangspunkt:

$\mathrm{A}(T,\ k)$

**Input:** Hashtabelle $T$ der Größe $m$, Hashfunktion $h$, Schlüssel $k$

**Output:** Freier Slot $j$, falls es einen solchen gibt

```
1  j := h(k) mod m; i := 0
2  while T[j] ≠ NIL and i < m do
3     i := i + 1
4     j := (i + j) mod m
5  if (i < m) then
6     return j
7  else
8     return NIL
```

## Bestimmen der Parameter $c_1$ und $c_2$ (Forts.)

**Satz.** Angenommen, $m = 2^n$. Dann ist die von dem Algorithmus $\mathrm{A}$ durchlaufene Sondierungssequenz identisch zu Quadratic Probing mit den Parametern $c_1 = \frac{1}{2}$ und $c_2 = \frac{1}{2}$.

Zu beweisen:

1. Der Algorithmus ist identisch zu Quadratic Probing mit obigen Parametern
2. Mit den obigen Parametern erzeugt Quadratic Probing für beliebiges $k$ eine korrekte Sondierungssequenz





## Beweis von Punkt 1

Schleifeninvariante: Angenommen, $m = 2^n$. Dann gilt nach dem $j$-ten Durchlauf der while-Schleife des Algorithmus $\mathrm{A}$, dass

$$j = h(k) + \frac{1}{2} \cdot i + \frac{1}{2} \cdot i^2 \bmod m$$

**Beweis.** Induktion über die Anzahl der Schleifendurchläufe

Initialisierung: Vor der ersten Ausführung von Zeile 3 des Algorithmus $\mathrm{A}$ ist $j = h(k)$ und $i = 0$. Somit:

$$\begin{aligned} j &= h(k) \\ &= h(k) + \frac{1}{2} \cdot 0 + \frac{1}{2} \cdot 0^2 \bmod m \\ & \quad h(k) + \frac{1}{2} \cdot i + \frac{1}{2} \cdot i^2 \bmod m \end{aligned}$$

# Beweis von Punkt 1 (Forts.)

Aufrechterhaltung: Angenommen, die Schleife wurde $j$-mal durchlaufen und es gilt:

$$j = \left( h(k) + \frac{1}{2} \cdot i + \frac{1}{2} \cdot i^2 \right) \bmod m$$

Im nächsten Durchlauf sind die neuen Werte der Variablen $i$ und $j$ gleich

$$\begin{aligned} i^* &= i + 1 \\ j^* &= i^* + j \bmod m \\ &= i + 1 + j \bmod m \end{aligned}$$





# Beweis von Punkt 1 (Forts.)

Hieraus folgt:

$$\begin{aligned} j^* &\equiv j + i + 1 \pmod m \\ &\equiv h(k) + \frac{1}{2} \cdot i + \frac{1}{2} \cdot i^2 + i + 1 \pmod m \\ &\equiv h(k) + \frac{1}{2} \cdot i + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot i^2 + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot i + \frac{1}{2} \pmod m \\ &\equiv h(k) + \frac{1}{2} \cdot (i+1) + \frac{1}{2} \cdot (i^2 + 2i + 1) \pmod m \\ &\equiv h(k) + \frac{1}{2} \cdot (i+1) + \frac{1}{2} \cdot (i+1)^2 \pmod m \end{aligned}$$

Also gilt am Ende des Durchlaufs:

$$j^* = h(k) + \frac{1}{2} \cdot (i+1) + \frac{1}{2} \cdot (i+1)^2 \bmod m$$

## Beweis von Punkt 2

Wir definieren:

$$\begin{aligned} h(k,i) &= h(k) + \frac{1}{2}\cdot i + \frac{1}{2}\cdot i^2 \bmod m \\ &= h(k) + \frac{i\cdot(i+1)}{2} \bmod m \\ &= h(k) + S_i \bmod m \end{aligned}$$

wobei $S_i = \sum_{\ell=1}^{i} \ell$.

**Behauptung.** Angenommen. $m = 2^n$. Dann ist die Folge

$$\langle h(k,0), h(k,1), \ldots, h(k,m-1)\rangle$$

für alle $k$ eine Sondierungsequenz.





## Beweis von Punkt 2 (Forts.)

Annahme: Es gibt Werte $k, i, j$ mit $h(k,i) = h(k,j)$, wobei $0 \leq i < j < 2^n - 1$.

Also ist:

$$S_i \equiv S_j \pmod{2^n}$$

Somit:

$$\begin{aligned} S_i &= a\cdot 2^n + r \\ S_j &= b\cdot 2^n + r \end{aligned}$$

wobei $a < b$

# Beweis von Punkt 2 (Forts.)

Hieraus folgt:

$$S_j - S_i = \sum_{\ell=i+1}^{j} \ell = \underbrace{(b-a)}_{=c} \cdot 2^n$$

Wegen

$$\sum_{\ell=i+1}^{j} \ell = \frac{(j-i)\cdot(j+i+1)}{2}$$

folgt: $(j-i)\cdot(j+i+1) = c \cdot 2^{n+1}$

Also: $2^{n+1} \mid (j-i)\cdot(j+i+1)$





# Beweis von Punkt 2 (Forts.)

Bekannt: Für alle natürlichen Zahlen $a, b, d$ gilt: Falls $d \mid ab$ und $\gcd(a,d) = 1$, dann $d \mid b$.

Fallunterscheidung:

- $i$ gerade, $j$ gerade: Also ist $j+i+1$ ungerade und deshalb $\gcd(j+i+1, 2^{n+1}) = 1$. Also muss $2^{n+1} \mid (j-i)$ gelten. Widerspruch, da $j - i < m < 2^{n+1}$.
- $i$ ungerade, $j$ ungerade: analog zum vorigen Punkt

## Beweis von Punkt 2 (Forts.)

- $i$ ungerade, $j$ gerade: Also ist $j - i$ ungerade und deshalb $\gcd(j - i, 2^{n+1}) = 1$. Also muss $2^{n+1} \mid (j + i + 1)$ gelten. Widerspruch, da $j + i + 1 \leq 2m - 1 < 2^{n+1}$.
- $i$ gerade, $j$ ungerade: analog zum vorigen Punkt

Konsequenz: Jede Wahl von $i$ und $j$ führen zu einem Widerspruch. Folglich ist obige Annahme falsch (und die Behauptung korrekt).

Bemerkung: Bei Quadratic Probing verwendet man den Algorithmus $\mathrm{A}$, um die Hashtabelle nach einem freien Slot zu durchsuchen





## Double Hashing

Kombination zweier Hashfunktion $h_1$ und $h_2$:

$$h(k, i) = (h_1(k) + i \cdot h_2(k)) \bmod m$$

**Bedingung:** $h_2(k)$ und $m$ müssen für alle $k$ teilerfremd sein.

**Bemerkungen:**

- Double Hashing ist eine der besten Methoden für Open Addressing.
- Die erzeugten Sondierungssequenzen ähneln Zufallspermutationen.

## Korrektheit von Double Hashing

**Satz.** Falls $\gcd(h_2(k), m) = 1$, dann ist

$$\langle h(k,0), \ldots, h(k, m-1) \rangle$$

eine Sondierungssequenz.

*Beweis.* Angenommen, $\gcd(h_2(k), m) = 1$ und es gibt zwei Zahlen $0 \leq i < j \leq m-1$, so dass $h(k,i) = h(k,j)$.

Hieraus folgt: $i \cdot h_2(k) \equiv j \cdot h_2(k) \pmod{m}$

Da $\gcd(h_2(k), m) = 1$, besitzt $h_2(k)$ ein multiplikatives Inverses modulo $m$.

Somit ist $i \equiv j \pmod{m}$. Widerspruch!





## Funktionen für Double Hashing

Methode 1: Wähle $m = 2^k$, wobei $k \in \mathbb{N}$ und erstelle $h_2$ derart, dass die Funktion immer eine ungerade Zahl liefert

**Beispiel:** $m = 2048$ $k = 123456$:

$$\begin{aligned} h_1(k) &= k \bmod 2048 \\ h_2(k) &= (2k+1) \bmod 2048 \end{aligned}$$

Somit $h(k,0) = 576$, $h(k,i) = (576 + i \cdot 1153) \bmod 2048$ für $i = 1, 2, \ldots, m-1$.

# Funktionen für Double Hashing (Forts.)

Methode 2: Wähle eine Primzahl $m$ und

$$\begin{aligned} h_1(k) &= k \bmod m \\ h_2(k) &= 1 + (k \bmod m') \end{aligned}$$

wobei $m'$ "etwas kleiner" als $m$ ist, z.B. $m' = m - 1$.

**Beispiel:** $m = 701$, $m' = 700$, $k = 123456$:

$$\begin{aligned} h_1(k) &= 80 \\ h_2(k) &= 257 \end{aligned}$$

Somit $h(k, 0) = 80$, $h(k, i) = (80 + i \cdot 257) \bmod 701$ für $i = 1, 2, \ldots, m - 1$.

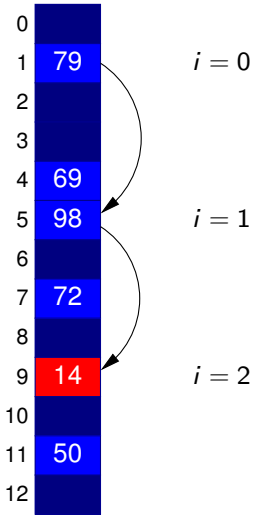




# Beispiel Double Hashing

$m = 13$, $h_1(k) = k \bmod 13$, $h_2(k) = 1 + (k \bmod 11)$
$h(k, i) = (h_1(k) + i \cdot h_2(k)) \bmod 13$

Einfügen des Schlüssels 14:



# Uniform Hashing Annahme

Uniform Hashing Annahme: Jeder Schlüssel $k$ wählt eine der $m!$ Permutationen von $\langle 0, 1, \ldots, m-1 \rangle$ mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{m!}$ als Sondierungssequenz aus.

**Bemerkung:** Jedem Schlüssel wird eine Sondierungsequenz zufällig unter Gleichverteilung zugewiesen





# Open Addressing: nicht erfolgreiche Suche

**Satz.** Unter der Uniform Hashing Annahme gilt für jede Hashtabelle mit Belegungsfaktor $\alpha = \frac{n}{m} < 1$: die durchschnittliche Anzahl der Sondierungsversuche bei einer nicht erfolgreichen Suche ist höchstens $\frac{1}{1-\alpha}$.

*Beweis.* Ablauf einer nicht erfolgreichen Suche nach dem Schlüssel $k$:

- Alle bis auf den letzten untersuchten Slot enthalten einen Schlüssel, der ungleich $k$ ist
- Der letzte untersuchte Slot ist leer

# Open Addressing: nicht erfolgreiche Suche (Forts.)

Ereignis $A_i$: Es gibt einen $i$-ten Sondierungsversuch und der Zugriff erfolgt auf einen belegten Slot, wobei $i = 1, \ldots, n$

Zufallsvariable $X$: Anzahl der sondierten Slots bei einer nicht erfolgreichen Suche

Für $i \geq 2$ gilt:

$$Prob\left[X \geq i\right] = Prob\left[A_1 \cap \ldots \cap A_{i-1}\right]$$

Rechenregel:

$$\begin{aligned} & Prob\left[A_1 \cap \ldots \cap A_{i-1}\right] \\ = \;& Prob\left[A_1\right] \cdot Prob\left[A_2 \mid A_1\right] \cdot Prob\left[A_3 \mid A_1 \cap A_2\right] \\ & \cdots Prob\left[A_{i-1} \mid A_1 \cap \ldots \cap A_{i-2}\right] \end{aligned}$$





# Open Addressing: nicht erfolgreiche Suche (Forts.)

Uniform Hashing Annahme:

$$\begin{aligned} Prob\left[A_1\right] &= \frac{n}{m} \\ Prob\left[A_j \mid A_1 \cap \ldots \cap A_{j-1}\right] &= \frac{n-(j-1)}{m-(j-1)} \end{aligned}$$

Hierauf folgt:

$$\begin{aligned} Prob\left[X \geq i\right] &= \frac{n}{m} \cdot \frac{n-1}{m-1} \cdot \frac{n-2}{m-2} \cdots \frac{n-i+2}{m-i+2} \\ &\leq \left(\frac{n}{m}\right)^{i-1} \\ &= \alpha^{i-1} \end{aligned}$$

# Open Addressing: nicht erfolgreiche Suche (Forts.)

Erwartungswert von $X$:

$$\begin{aligned} Exp[X] &= \sum_{i=1}^{\infty} Prob[X \geq i] \\ &\leq \sum_{i=1}^{\infty} \alpha^{i-1} \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} \alpha^{i} \\ &= \frac{1}{1-\alpha} \end{aligned}$$





# Open Addressing: Einfügen eines Elements

**Konsequenz:** Unter Uniform Hashing gilt: Um ein Element in eine Hashtabelle mit Belegungsfaktor $\alpha$ einzufügen, benötigt man im Durchschnitt höchstens $\frac{1}{1-\alpha}$ Sondierungsschritte

Zahlenbeispiele:

| $\alpha$ | $1/(1-\alpha)$ |
|---|---|
| 10% | 1.11 |
| 20% | 1.25 |
| 50% | 2.00 |
| 75% | 4.00 |
| 90% | 10.00 |
| 95% | 20.00 |

# Open Addressing: erfolgreiche Suche

**Satz.** Gegeben ist eine Open Addressing Hashtabelle mit einem Belegungsfaktor $\alpha < 1$.

Angenommen, es gilt Uniform Hashing und der zu suchende Schlüssel wird zufällig unter Gleichverteilung gezogen.

Dann ist die durchschnittliche Anzahl der Sondierungsversuche bei einer erfolgreichen Suche höchstens $\frac{1}{\alpha} \ln\left(\frac{1}{1-\alpha}\right)$.





# Open Addressing: erfolgreiche Suche (Forts.)

**Beweis.** Da die Suche nach $k$ erfolgreich verläuft, muss $k$ in der Tabelle enthalten sein.

Beobachtung: Bei der Suche nach $k$ wird dieselbe Sondierungssequenz durchlaufen wie beim Einfügen des Schlüssels.

Annahme: $k$ war der $(i+1)$-te Schlüssel, der in die Tabelle eingefügt wurde.
Konsequenz: Mittlere Anzahl Sondierungsversuche, um $k$ zu finden, ist gleich

$$\frac{1}{1-\left(\frac{i}{m}\right)} = \frac{m}{m-i}$$

# Open Addressing: erfolgreiche Suche (Forts.)

Erwartungswert über alle $n$ Schlüssel in der Tabelle:

$$\begin{aligned}\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\frac{m}{m-i} &= \frac{m}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\frac{1}{m-i} \\ &= \frac{1}{\alpha}(H_m - H_{m-n}) \\ &= \frac{1}{\alpha}\sum_{i=m-n+1}^{m}\frac{1}{i}\end{aligned}$$

Hierbei steht $H_m$ für die harmonische Reihe, d.h.

$$H_m = \sum_{i=1}^{m}\frac{1}{i}.$$





# Open Addressing: erfolgreiche Suche (Forts.)

Fakt: Für jede monoton abnehmende Funktion $f(x)$ gilt:

$$\sum_{i=m}^{n} f(i) \leq \int_{m-1}^{n} f(x)\ dx$$

Hieraus folgt:

$$\begin{aligned}\frac{1}{\alpha}\sum_{i=m-n+1}^{m}\frac{1}{i} &\leq \frac{1}{\alpha}\int_{m-n}^{m}\frac{1}{x}dx \\ &= \frac{1}{\alpha}\ln x\Big|_{m-n}^{m}\end{aligned}$$

# Open Addressing: erfolgreiche Suche (Forts.)

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{\alpha}(\ln m - \ln(m-n)) \\
&= \frac{1}{\alpha}\ln\left(\frac{m}{m-n}\right) \\
&= \frac{1}{\alpha}\ln\left(\frac{1}{1-\alpha}\right)
\end{aligned}
$$





# Zusammenfassung

- Hashing ist eine Verallgemeinerung von Arrays
- In einer Hashtabelle werden Daten mit Zugriffsschlüsseln gespeichert
- Die Zugriffszeit auf die Hashtabelle ist im Durchschnitt konstant
- Kollisionen werden aufgelöst durch
  - Chaining
  - Open Addressing