

# Algorithmen und Datenstrukturen 2

## Lerneinheit 1: Priority Queues

Prof. Dr. Christoph Karg

Studiengang Informatik  
Hochschule Aalen



Sommersemester 2016



13.3.2015

Einleitung

## Einleitung

Das Thema dieser Lerneinheit sind [Priority Queues](#). Hierunter versteht man Datenstrukturen, in denen Datensätze mit einem Prioritätsschlüssel gespeichert werden.

- Wiederholung: Heap Sort
- Priority Queue auf Basis von Heap Sort
- Binomial Heaps

# Heap Sort

Der Erfinder von Heap Sort ist J. W. J. Williams. Der Algorithmus wurde 1964 veröffentlicht und hat folgende Eigenschaften:

- Die Sortierung erfolgt „in place“, d.h., es ist nur konstanter zusätzlicher Speicherplatz notwendig
- Es wird eine Heap Datenstruktur eingesetzt  
( $\rightsquigarrow$  Interpretation des Arrays als Binärbaum)
- Die Laufzeit von Heap Sort ist  $O(n \log_2 n)$

# Wissenswertes über Binärbäume

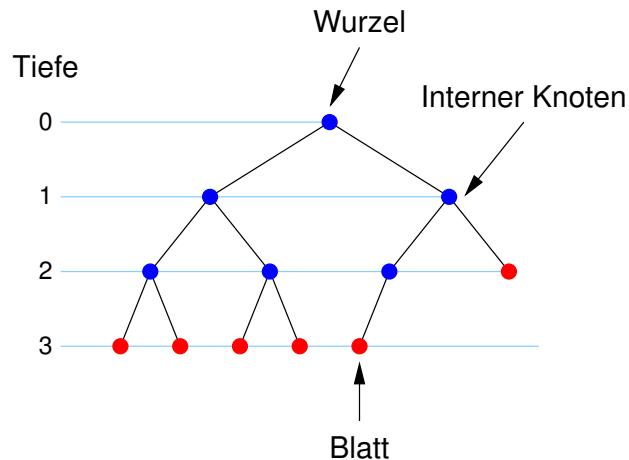
- Ein **Binärbaum** ist ein Baum mit der Eigenschaft, dass jeder Knoten höchstens zwei Nachfolger hat
- Die **Tiefe eines Knotens** ist gleich der Anzahl der Kanten des kürzesten Pfads vom Knoten zur Wurzel des Baums
- Die **Tiefe des Baums** ist gleich der maximalen Tiefe eines Blatts
- Ein Binärbaum heißt **balanciert**, falls für zwei beliebige Blätter  $u$  und  $v$  gilt:

$$|\text{Tiefe}(u) - \text{Tiefe}(v)| \leq 1$$

- Es gilt: ein balancierter Binärbaum mit  $n$  Knoten hat Tiefe  $\lfloor \log_2 n \rfloor$

# Beispiel Binärbaum

Binärbaum mit 12 Knoten



# Binärer Heap

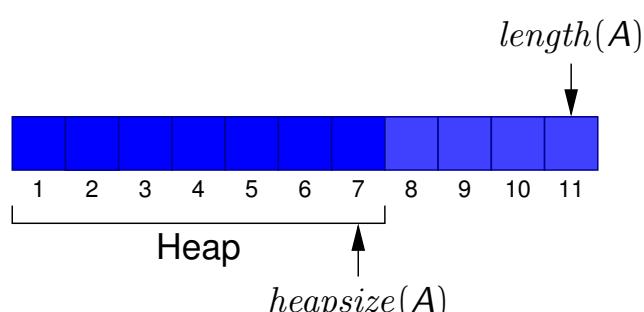
Gegeben: Array  $A$  mit  $n$  Elementen

Zwei Attribute:

- $length(A)$ : Anzahl der Elemente in  $A$
- $heapsize(A)$ : Anzahl der Elemente im Heap  $A$

Es muss gelten:  $heapsize(A) \leq length(A)$

Anschaulich:



## Binärer Heap (Forts.)

**Idee:** Interpretiere das Array  $A$  als balancierten Binärbaum

**Eigenschaften:**

- Jeder Index steht für einen Knoten
- Die Tiefe des Heaps ist  $\lfloor \log_2 n \rfloor = \Theta(\log_2 n)$
- Wurzel des Baums ist der Index 1
- Der Elternknoten von  $i$  ist  $\text{parent}(i) = \lfloor \frac{i}{2} \rfloor$ , wobei  $i = 1, 2, \dots, n$
- Das linke bzw. rechte **Kind** von  $i$ ,  $i = 1, 2, \dots, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ , ist
  - ▷  $\text{left}(i) = 2 \cdot i$
  - ▷  $\text{right}(i) = 2 \cdot i + 1$

**Beachte:** Die Operationen  $\lfloor \frac{i}{2} \rfloor$  und  $2 \cdot i$  sind durch einen Rechts- bzw. Linksshift effizient berechenbar

## Heap Eigenschaft

- **Max-Heap:** Für alle Knoten  $i = 1, 2, \dots, n$  gilt:

$$A[i] \leq A[\text{parent}(i)]$$

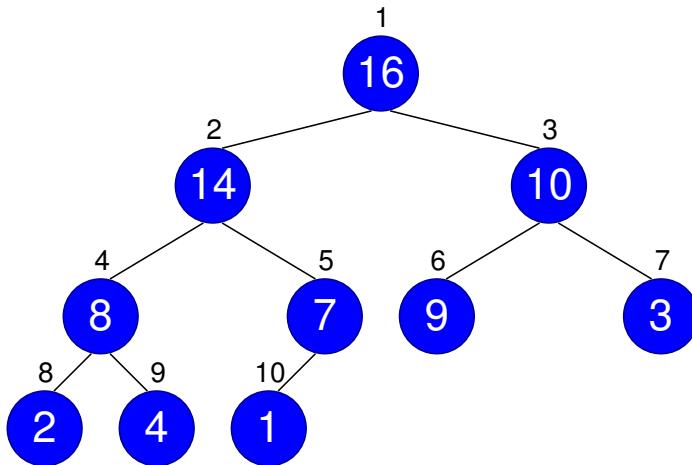
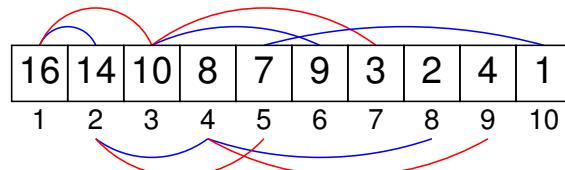
Die Wurzel des Heaps enthält also das größte Element des Arrays.

- **Min-Heap:** Für alle Knoten  $i = 1, 2, \dots, n$  gilt:

$$A[i] \geq A[\text{parent}(i)]$$

Die Wurzel des Heaps enthält also das kleinste Element des Arrays.

## Ansicht eines Heaps



## Heap Operationen

Heap Sort setzt sich zusammen aus folgenden Algorithmen:

- **MaxHeapify**: Herstellen der Max-Heap Eigenschaft für einen Teilbaum (Laufzeit  $O(\log_2 n)$ )
- **BuildMaxHeap**: Erzeugen eines Max-Heaps aus einem unsortierten Array (Laufzeit  $O(n)$ )
- **HeapSort**: Sortierverfahren (Laufzeit  $O(n \log_2 n)$ )

# Herstellen der Max-Heap Eigenschaft

**Gegeben:** Array  $A$  und Index  $i$ , wobei die Bäume mit Wurzel  $left(i)$  bzw.  $right(i)$  Max-Heaps sind

**Aufgabe:** Stelle für den Heap mit Wurzel  $i$  die Max-Heap Eigenschaft her

**Idee:** Lasse das Element in  $A[i]$  „geeignet“ nach unten sinken

## MAXHEAPIFY( $A, i$ )

MAXHEAPIFY( $A, i$ )

**Input:** Array  $A$  mit Max-Heaps  $A[left(i)]$ ,  $A[right(i)]$

**Output:** Modifiziertes Array  $A$  mit Max-Heap  $A[i]$

```

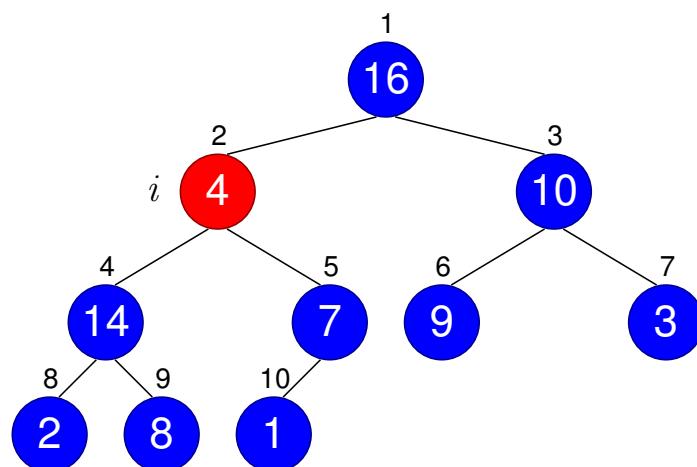
1   $l := left(i)$ 
2   $r := right(i)$ 
3  if  $l \leq \text{heapsize}(A)$  and  $A[l] > A[i]$  then
4     $largest := l$ 
5  else
6     $largest := i$ 
7  if  $r \leq \text{heapsize}(A)$  and  $A[r] > A[largest]$  then
8     $largest := r$ 
9  if  $largest \neq i$  then
10    Vertausche  $A[i]$  und  $A[largest]$ 
11    MAXHEAPIFY( $A, largest$ )

```

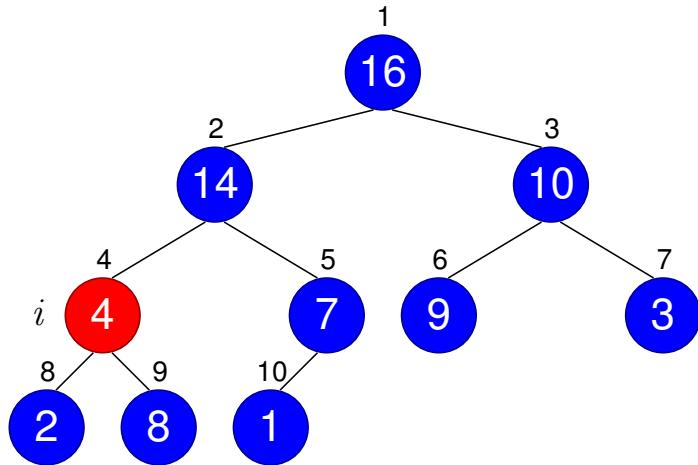
## Bemerkungen zu MAXHEAPIFY( $A, i$ )

- In Zeilen 3–8 wird der Index  $largest$  des größten Elements in  $\{A[i], A[left(i)], A[right(i)]\}$  gesucht
- Zeile 9: Ist  $A[i] \neq A[largest]$ , dann werden die beiden Elemente vertauscht.
- Zeile 10: Im Falle einer Vertauschung muss für den Baum mit Wurzel  $largest$  die Max-Heap Eigenschaft hergestellt werden.

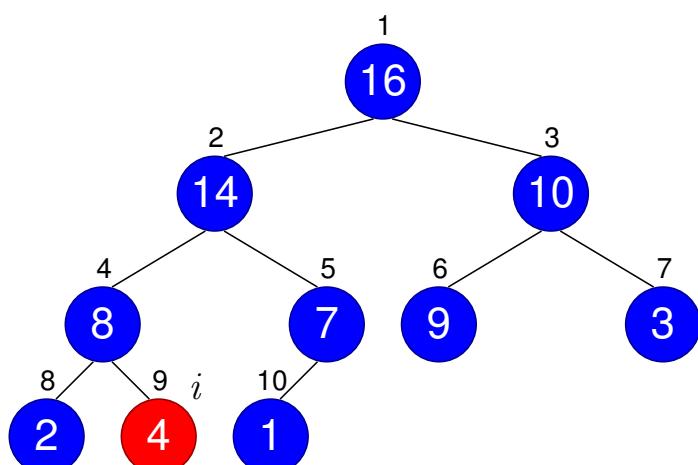
## Heap Eigenschaft



## Heap Eigenschaft (Forts.)



## Heap Eigenschaft (Forts.)



## Korrektheit von MAXHEAPIFY( $A, i$ )

**Induktionsbehauptung:** MAXHEAPIFY( $A, i$ ) ist für Heaps der Tiefe  $t$  korrekt.

**Induktionsanfang:**  $t = 0$ , d.h., der Heap besteht aus  $A[i]$  ✓

**Induktionsschritt:**  $t \rightsquigarrow t + 1$ . Betrachte den Aufruf von  $\text{MaxHeapify}(A, i)$ , wobei  $i$  die Wurzel eines Baums mit Tiefe  $t + 1$  ist.

- Nach Ausführung von Zeile 10 enthält  $A[i]$  das größte Element in  $\{A[i], A[\text{left}(i)], A[\text{right}(i)]\}$ .
- Wird MAXHEAPIFY( $A, \text{largest}$ ) in Zeile 11 aufgerufen, dann ist  $\text{largest} = l$  oder  $\text{largest} = r$ . Die Bäume mit Wurzel  $l$  bzw.  $r$  haben eine Tiefe  $\leq t$ . Laut Induktionsannahme ist  $\text{largest}$  nach Ausführung von MAXHEAPIFY ein Max-Heap.

Somit ist auch  $i$  ein Max-Heap. ✓

## Laufzeit von MAXHEAPIFY( $A, i$ )

- Die Laufzeit von MAXHEAPIFY( $A, i$ ) ist linear in Höhe des Heaps mit Wurzel  $i$ .
- Ist  $t$  die Tiefe des Knotens  $i$ , dann ist die Anzahl der rekursiven Aufrufe  $\leq \log_2 n - t$ , d.h., die Laufzeit von MAXHEAPIFY( $A, i$ ) ist  $O(\log_2 n - t)$ .
- Schlimmstenfalls ist die Tiefe des Knotens  $i$  gleich 0. In diesem Fall ist  $i$  die Wurzel des Binärbaums.

**Fazit:** Die Laufzeit von MAXHEAPIFY im schlimmsten Fall  $O(\log_2 n)$ .

## Erstellen eines Max-Heaps

**Aufgabe:** Erstelle aus einem unsortierten Array einen Max-Heap

**Idee:** Bearbeite den Heap „von unten nach oben“ mittels

**BUILDMAXHEAP( $A$ )**

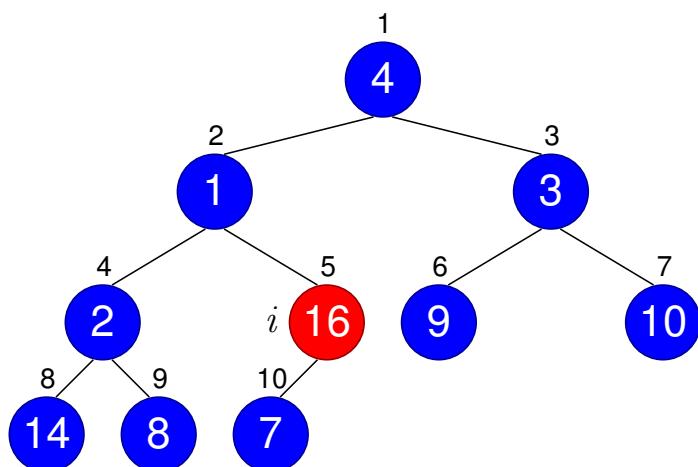
**Input:** Array  $A$

**Output:** Array  $A'$  mit Max-Heap Eigenschaft

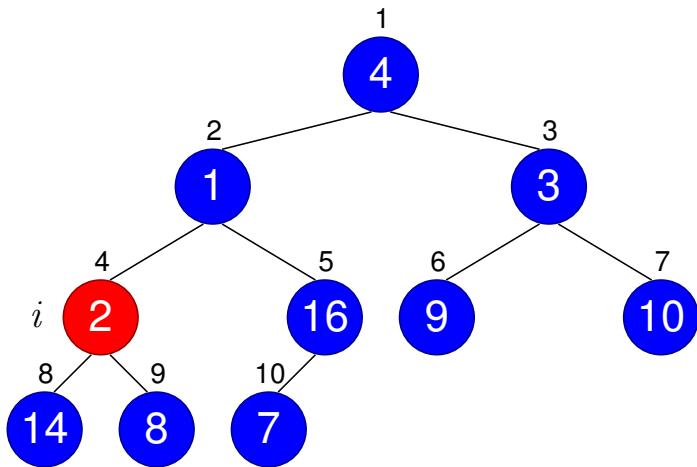
```

1  heapsize( $A$ ) := length( $A$ );
2  for  $i := \lfloor length(A)/2 \rfloor$  downto 1 do
3    MAXHEAPIFY( $A, i$ );
```

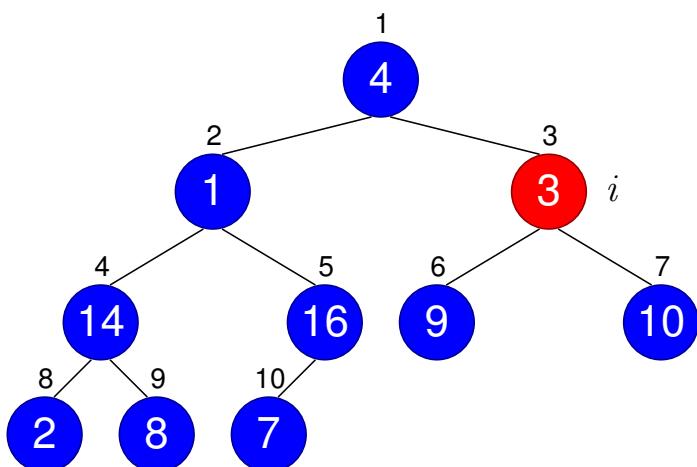
## Max-Heap Konstruktion



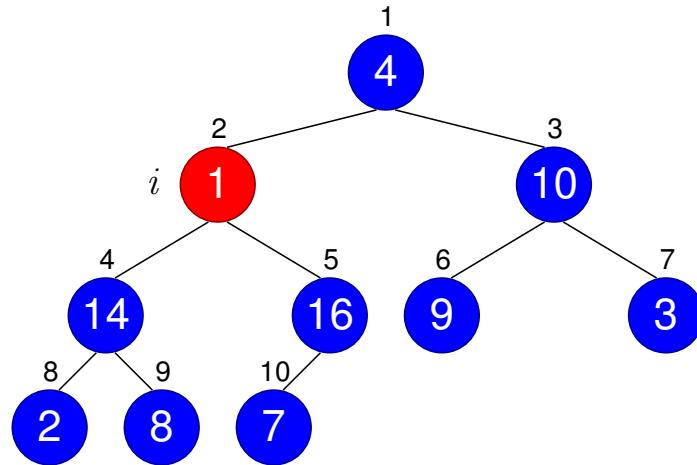
## Max-Heap Konstruktion (Forts.)



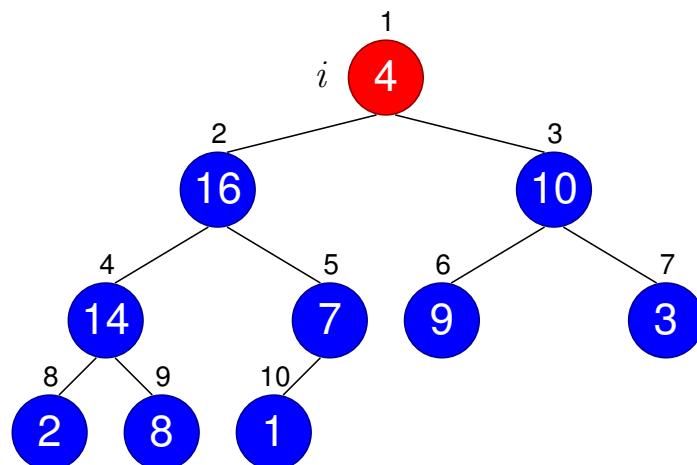
## Max-Heap Konstruktion (Forts.)



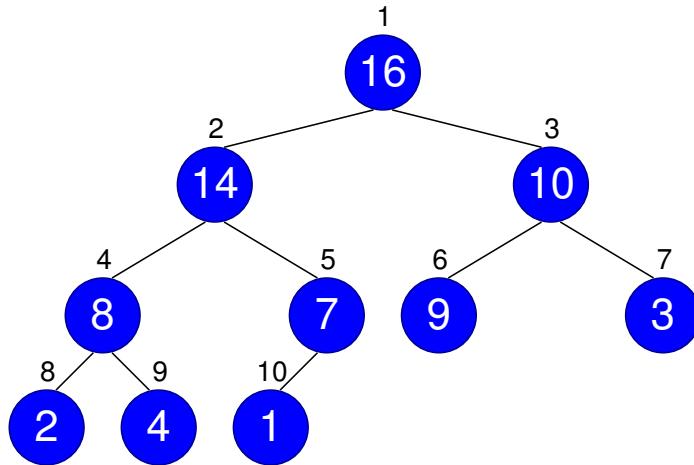
## Max-Heap Konstruktion (Forts.)



## Max-Heap Konstruktion (Forts.)



## Max-Heap Konstruktion (Forts.)



## Korrektheit von BUILDMAXHEAP(A)

Zu zeigen ist folgende **Schleifeninvariante**:

Zu Beginn jeder Iteration der for-Schleife in Zeile 2–3 ist jeder der Knoten  $i + 1, i + 2, \dots, n$  die Wurzel eines Max-Heaps.

**Initialisierung:** Vor der ersten Iteration ist  $i = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ . Die Bäume unterhalb von  $i + 1, i + 2, \dots, n$  sind Blätter und somit Max-Heaps.

## Korrektheit (Forts.)

**Aufrechterhaltung:** Betrachte eine Iteration der for-Schleife.

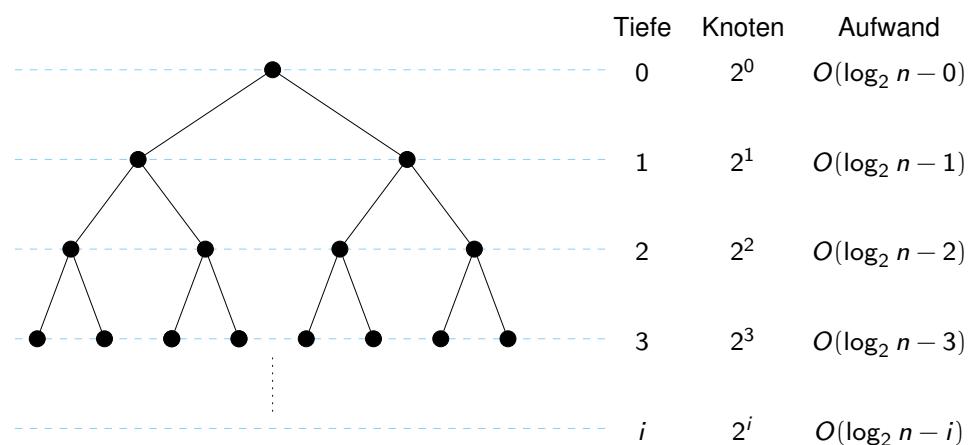
Die Kinder von  $i$  sind  $left(i) = 2 \cdot i$  und  $right(i) = 2 \cdot i + 1$ . Laut Invariante sind dies Wurzeln von Max-Heaps.

Somit ist die Eingabe von  $\text{MAXHEAPIFY}(A, i)$  korrekt. Nach der Ausführung von  $\text{MAXHEAPIFY}$  ist  $i$  also die Wurzel eines Max-Heaps.

**Beendigung:** Am Ende ist  $i = 0$ . Somit ist jeder der Knoten  $1, 2, \dots, n$  (also insbesondere Knoten 1) die Wurzel eines Max-Heaps.

## Laufzeit von $\text{BUILDMAXHEAP}(A)$

**Beobachtung:**



## Laufzeit (Forts.)

### Bekannt:

- Ist  $t$  die Tiefe von  $i$ , dann ist die Laufzeit von  $\text{MAXHEAPIFY}(A, i)$  gleich  $O(\log_2 n - t)$
- Ein balancierter Binärbaum mit  $n$  Elementen hat Tiefe  $\lfloor \log_2 n \rfloor$
- Die Anzahl der Knoten auf Tiefe  $t$  ist  $2^t$

Abschätzen der Laufzeit durch Aufsummieren:

$$\sum_{t=0}^{\lfloor \log_2 n \rfloor} 2^t O(\log_2 n - t)$$

## Laufzeit (Forts.)

Substitution:  $h = \lfloor \log_2 n \rfloor - t$  bzw.  $t = \lfloor \log_2 n \rfloor - h$

$$\begin{aligned} \sum_{t=0}^{\lfloor \log_2 n \rfloor} 2^t O(\log_2 n - t) &= \sum_{h=\lfloor \log_2 n \rfloor}^0 2^{\lfloor \log_2 n \rfloor - h} O(h) \\ &= \sum_{h=0}^{\lfloor \log_2 n \rfloor} 2^{\lfloor \log_2 n \rfloor} \cdot 2^{-h} O(h) \\ &= 2^{\lfloor \log_2 n \rfloor} \sum_{h=0}^{\lfloor \log_2 n \rfloor} O\left(\frac{h}{2^h}\right) \\ &\leq n \sum_{h=0}^{\lfloor \log_2 n \rfloor} O\left(\frac{h}{2^h}\right) \end{aligned}$$

## Laufzeit (Forts.)

**Bekannt:** Für alle  $|x| < 1$  gilt:

$$\sum_{h=0}^{\infty} hx^h = \frac{x}{(1-x)^2}$$

Setze  $x = \frac{1}{2}$ :

$$\sum_{h=0}^{\infty} h \left(\frac{1}{2}\right)^h = \sum_{h=0}^{\infty} \frac{h}{2^h} = \frac{\frac{1}{2}}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} = 2$$

## Laufzeit (Forts.)

Einsetzen:

$$n \sum_{h=0}^{\lfloor \log_2 n \rfloor} O\left(\frac{h}{2^h}\right) = nO\left(\sum_{h=0}^{\lfloor \log_2 n \rfloor} \frac{h}{2^h}\right) \leq nO(2) = O(n)$$

**Fazit:** Laufzeit von BUILDMAXHEAP(A) ist  $O(n)$

# Heap Sort

$\text{HEAPSORT}(A)$

**Input:** Array  $A$

**Output:** Array  $A$  in sortierter Form

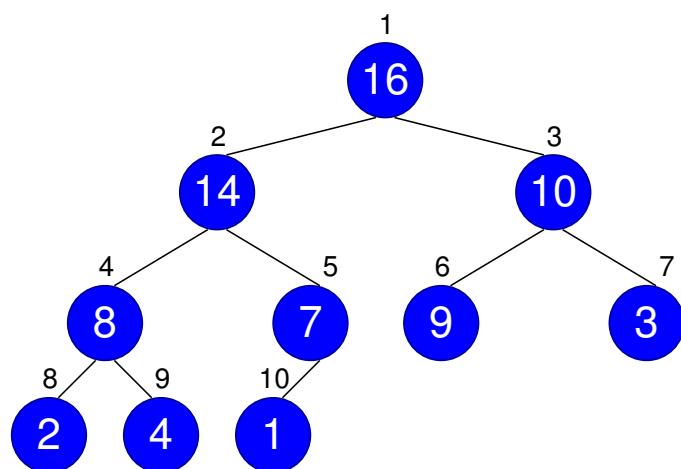
```

1  BUILDMAXHEAP( $A$ );
2  for  $i := \text{length}(A)$  downto 2 do
3      Vertausche  $A[1]$  und  $A[i]$ ;
4       $\text{heapsize}(A) := \text{heapsize}(A) - 1$ ;
5      MAXHEAPIFY( $A, 1$ );

```

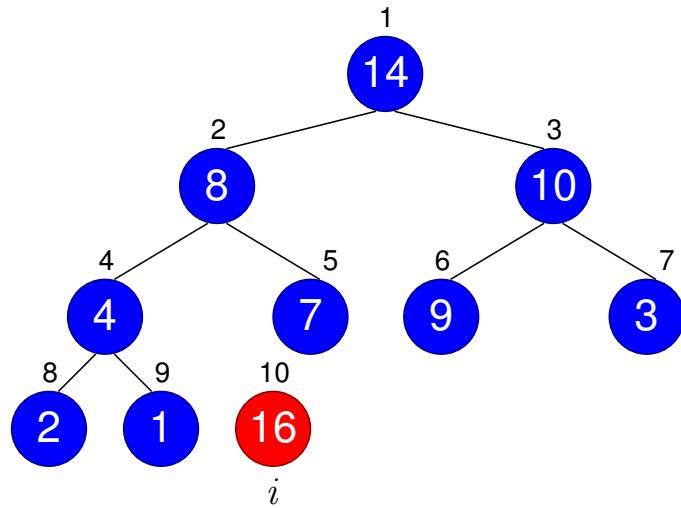
## Beispiel für Heap Sort

Zustand des Heaps nach Beendigung von  $\text{BUILDMAXHEAP}$ :



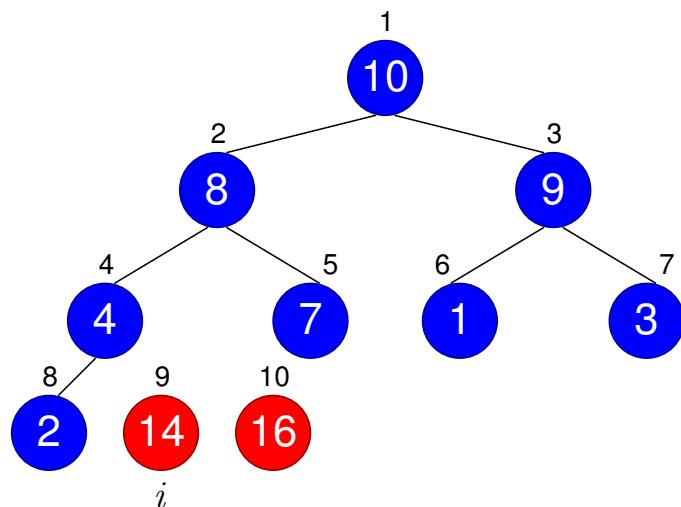
## Beispiel für Heap Sort (Forts.)

Zustand des Heaps nach dem 1. Schleifendurchlauf:



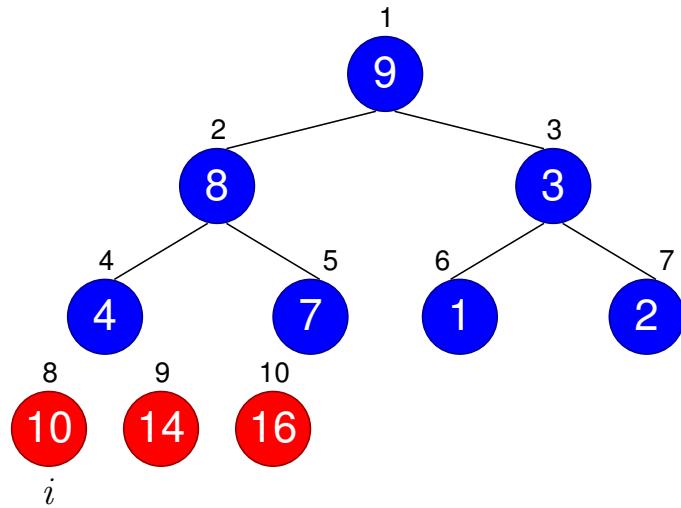
## Beispiel für Heap Sort (Forts.)

Zustand des Heaps nach dem 2. Schleifendurchlauf:



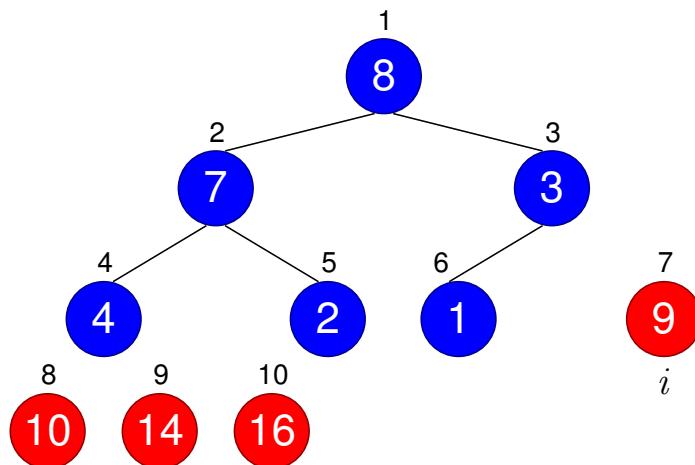
## Beispiel für Heap Sort (Forts.)

Zustand des Heaps nach dem 3. Schleifendurchlauf:



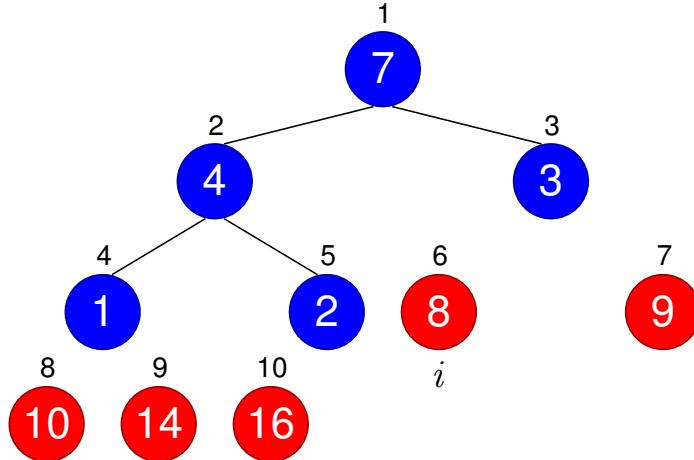
## Beispiel für Heap Sort (Forts.)

Zustand des Heaps nach dem 4. Schleifendurchlauf:



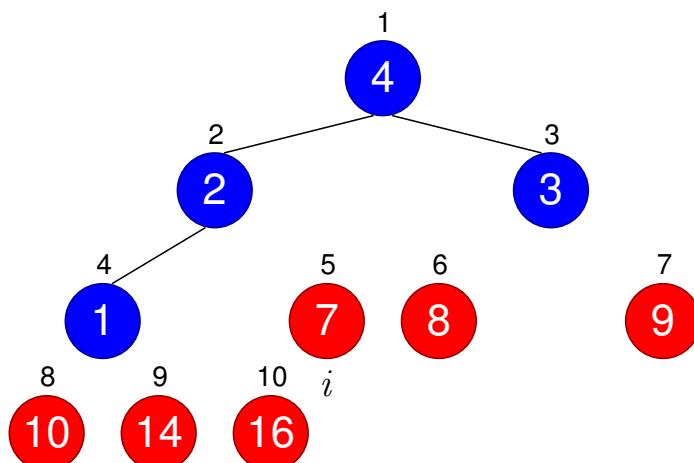
## Beispiel für Heap Sort (Forts.)

Zustand des Heaps nach dem 5. Schleifendurchlauf:



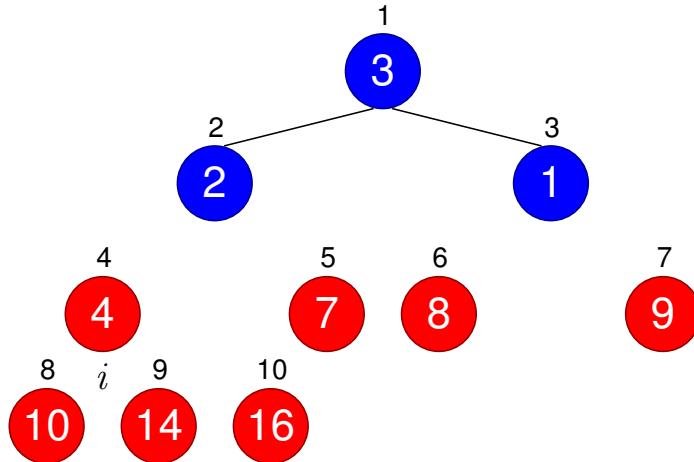
## Beispiel für Heap Sort (Forts.)

Zustand des Heaps nach dem 6. Schleifendurchlauf:



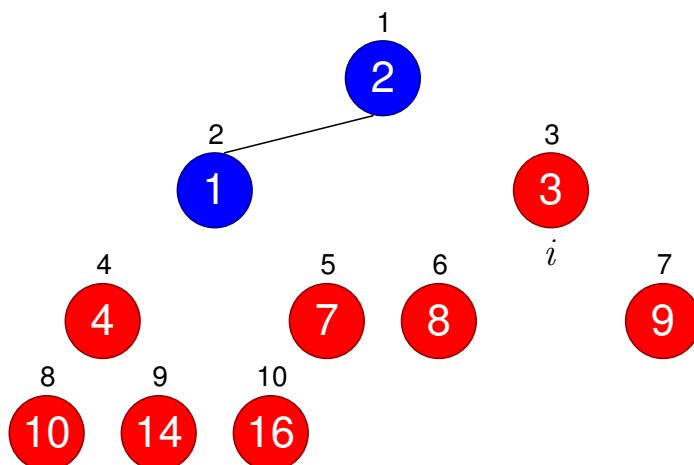
## Beispiel für Heap Sort (Forts.)

Zustand des Heaps nach dem 7. Schleifendurchlauf:



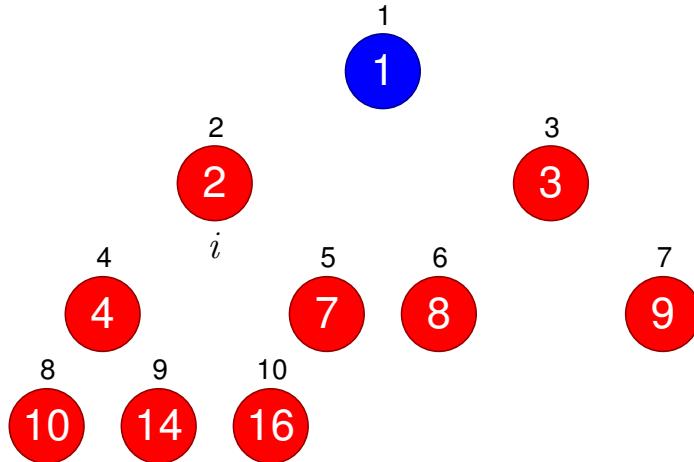
## Beispiel für Heap Sort (Forts.)

Zustand des Heaps nach dem 8. Schleifendurchlauf:



## Beispiel für Heap Sort (Forts.)

Zustand des Heaps nach dem 9. Schleifendurchlauf:



## Beispiel für Heap Sort (Forts.)

Ergebnis:

1	2	3	4	7	8	9	10	14	16
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

## Korrektheit von Heap Sort

**Schleifeninvariante:** Zu Beginn jeder Iteration der for-Schleife in Zeile 2–5 gilt:

- Das Teilarray  $A[i + 1..n]$  enthält die  $n - i$  größten Elemente von  $A[1..n]$  in sortierter Form.
- Das Teilarray  $A[1..i]$  ist ein Max-Heap und enthält die  $i$  kleinsten Elemente von  $A[1..n]$ .

**Initialisierung:** Vor der ersten Iteration der for-Schleife ist  $i = n = \text{length}(A)$ .

- Das Teilarray  $A[n + 1..n]$  ist leer und somit trivialerweise sortiert.
- Da in Zeile 1  $\text{BUILDMAXHEAP}(A)$  aufgerufen wurde, ist  $A[1..n]$  ein Max-Heap.

## Korrektheit von Heap Sort (Forts.)

**Aufrechterhaltung:** Betrachte den Zustand des Algorithmus vor Schleifendurchlauf  $i - 1$ . Wegen der Schleifeninvariante gilt:

- Da  $A[1..i - 1]$  ein Max-Heap ist, ist  $A[1]$  das größte Element in  $A[1..i - 1]$ .
- $A[1]$  ist kleiner als jedes Element in  $A[i..n]$ .

Hieraus folgt:

- Nach Vertauschen von  $A[1]$  und  $A[i - 1]$  in Zeile 3 gilt, dass  $A[i - 1..n]$  die  $n - i + 1$  größten Elemente von  $A$  in sortierter Form enthält.

## Korrektheit von Heap Sort (Forts.)

- Nach Ausführung der Zeilen 4 ist  $\text{heapsize}(A) = i - 2$ . Der Aufruf von `MAXHEAPIFY` garantiert, dass  $A[1..i - 2]$  ein Max-Heap ist.

**Beendigung:** Nach Beendigung der for-Schleife ist  $i = 1$ . Es gilt:

- $A[2..n]$  enthält die  $n - 1$  größten (also alle) Elemente von  $A$  in sortierter Form.
- $A[1..1]$  ist ein Max-Heap und enthält das kleinste Element von  $A$  als Wurzel.

**Fazit:**  $A[1..n]$  enthält die ursprünglichen Elemente in sortierter Form. Also ist die Arbeitsweise von Heap Sort korrekt.

## Laufzeit von Heap Sort

Die Laufzeit von Heap Sort für ein Array  $A$  der Länge  $n$  setzt sich zusammen aus:

1. Ausführung von `BUILDMAXHEAP(A)`: Laufzeit  $O(n)$
2. Durchlaufen der for-Schleife, d.h.,  $n$ -malige Ausführung von `MAXHEAPIFY(A,1)`: Laufzeit  $O(n \log_2 n)$

**Ergebnis:** Die Laufzeit von Heap Sort ist  $O(n \log_2 n)$ .

# Priority Queues

- Datenstruktur zum Speichern einer Menge  $S$  von Datensätzen
- Jedem Element  $x$  ist ein Schlüssel  $k = \text{key}(x)$  zugeordnet
- Operationen:
  - ▷  $\text{INSERT}(S, x) \rightsquigarrow x$  in die Menge  $S$  einfügen
  - ▷  $\text{MAXIMUM}(S) \rightsquigarrow$  Element mit dem größten Schlüssel ermitteln
  - ▷  $\text{EXTRACTMAX}(S) \rightsquigarrow$  Element mit dem größten Schlüssel ermitteln und aus  $S$  löschen
  - ▷  $\text{INCREASEKEY}(S, x, k) \rightsquigarrow$  Den Schlüssel des Elements  $x$  auf  $k$  erhöhen, wobei  $k > \text{key}(x)$
- Analog für minimale Schlüssel

# Einsatz eines Max-Heaps

- Eine Priority Queue kann mittels eines Max-Heaps  $A$  implementiert werden
- Erweiterung: Neben den Schlüsseln müssen auch die Satellitendaten im Array gespeichert werden
- Vorteil: Laufzeit der Queue Operationen ist höchstens linear in der Tiefe des Heaps
- Nachteil: ein Heap hat eine maximale Kapazität

## Auslesen des Maximums

$\text{MAXIMUM}(A)$

1    **return**  $A[1]$

- Da bei einem Max-Heap das größte Element in der Wurzel des Heaps gespeichert wird, liefert  $\text{MAXIMUM}(S)$  das korrekte Ergebnis
- Die Laufzeit ist  $O(1)$ , also konstant unabhängig von der Größe des Heaps

## Auslesen und Löschen des Maximums

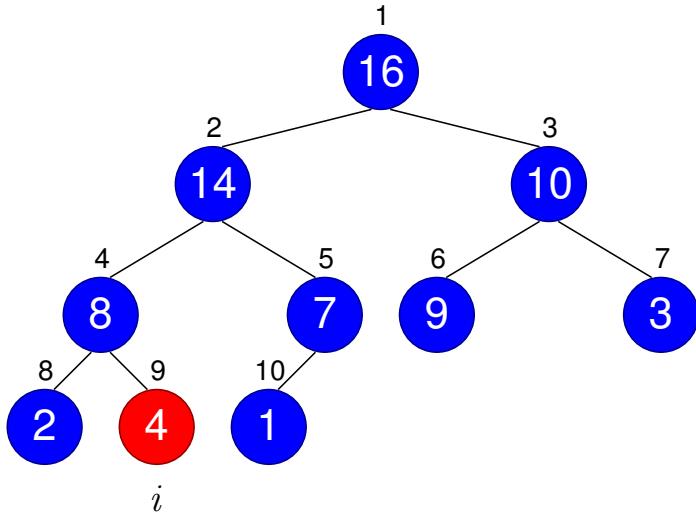
$\text{HEAPEXTRACTMAX}(A)$

1    **if**  $\text{heapsize}(A) < 1$  **then**  
 2        **error** "Heap underflow"  
 3         $max := A[1]$   
 4         $A[1] := A[\text{heapsize}(A)]$   
 5         $\text{heapsize}(A) := \text{heapsize}(A) - 1$   
 6         $\text{MAXHEAPIFY}(A, 1)$   
 7        **return**  $max$

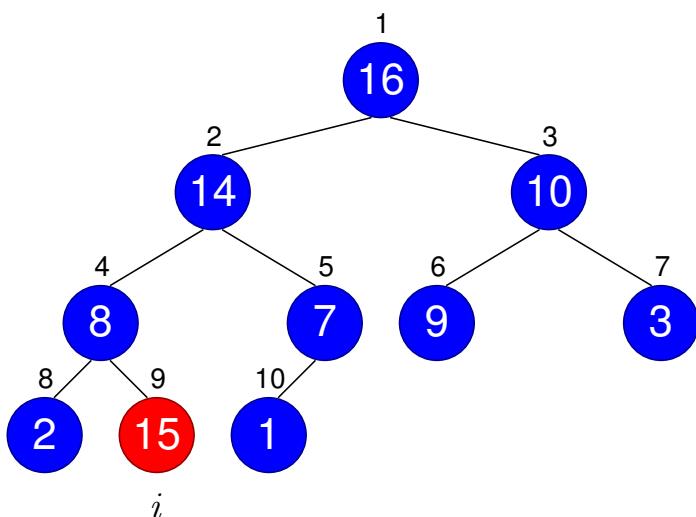
- Es wird das Maximum von  $A$  zurückgegeben
- In Zeilen 4–6 wird das Element gelöscht und die Max-Heap Eigenschaft von  $A$  wieder hergestellt
- Die Laufzeit ist  $O(\log_2 n)$

## Erhöhen des Schlüssels eines Elements (Idee)

Erhöhen des Schlüssels von Element  $i = 9$  auf den Wert 15:

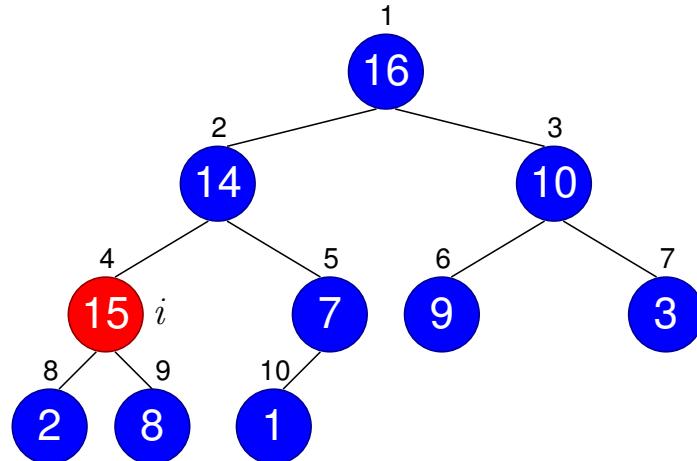


## Erhöhen des Schlüssels eines Elements (Idee)



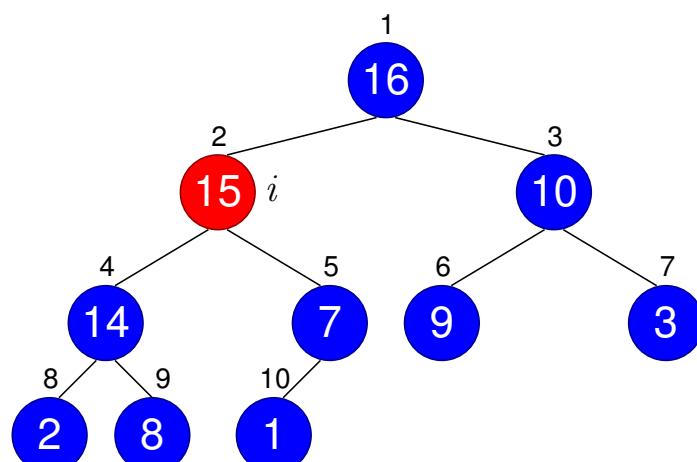
## Erhöhen des Schlüssels eines Elements (Idee)

Das Element wandert nach oben ...



## Erhöhen des Schlüssels eines Elements (Idee)

... bis die Max-Heap Eigenschaft wieder hergestellt ist



## Erhöhen des Schlüssels eines Elements

**HEAPIINCREASEKEY( $A, i, key$ )**

```

1  if  $key < A[i]$  then
2    error "new key is smaller than old key"
3     $A[i] := key$ 
4  while  $i > 1$  and  $A[\text{parent}(i)] < A[i]$  do
5    Vertausche  $A[i]$  und  $A[\text{parent}(i)]$ 
6     $i := \text{parent}(i)$ 

```

- Das Element  $i$  mit dem vergrößerten Schlüssel wandert solange nach oben, bis die Max-Heap Eigenschaft wieder hergestellt ist
- Die Laufzeit ist linear in der Tiefe des Heaps, also  $O(\log_2 n)$

## Einfügen eines Elements

**MAXHEAPINSERT( $A, key$ )**

```

1   $\text{heapsize}(A) := \text{heapsize}(A) + 1$ 
2   $A[\text{heapsize}(A)] := -\infty$ 
3  HEAPIINCREASEKEY( $A, \text{heapsize}(A), key$ )

```

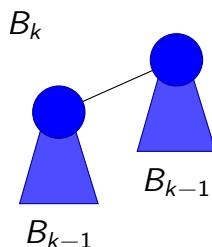
- $A[\text{heapsize}(A)]$  wird vorübergehend auf  $-\infty$  gesetzt, damit der Aufruf von HEAPIINCREASEKEY keinen Fehler liefert
- Die Laufzeit ist  $O(\log_2 n)$

# Binomialbäume

- Der Binomialbaum  $B_k$  ist ein geordneter Baum
- Der Aufbau von  $B_k$  ist rekursiv definiert:
  - ▷  $B_0$  besteht aus einem Knoten



- ▷  $B_k$  besteht aus zwei Binomialbäumen  $B_{k-1}$ , wobei der eine links unterhalb des anderen hängt

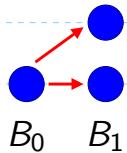


- $B_k$  hat die Tiefe  $k$

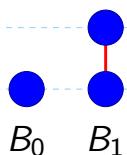
## Binomialbäume Beispiel

 $B_0$

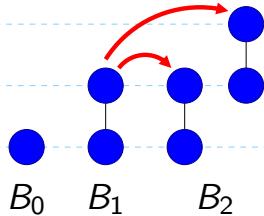
## Binomialbäume Beispiel (Forts.)



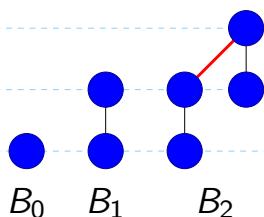
## Binomialbäume Beispiel (Forts.)



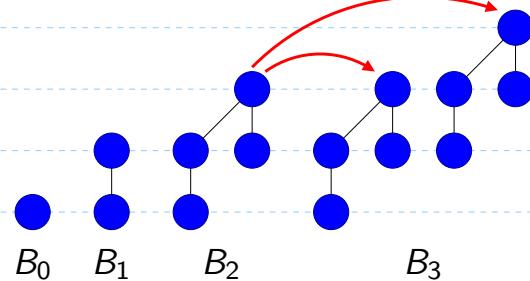
## Binomialbäume Beispiel (Forts.)



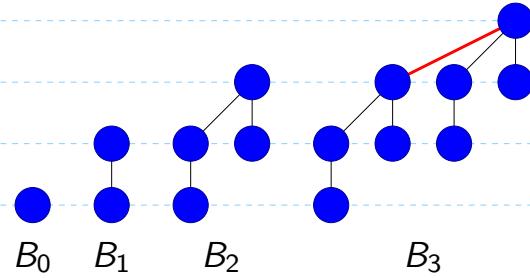
## Binomialbäume Beispiel (Forts.)



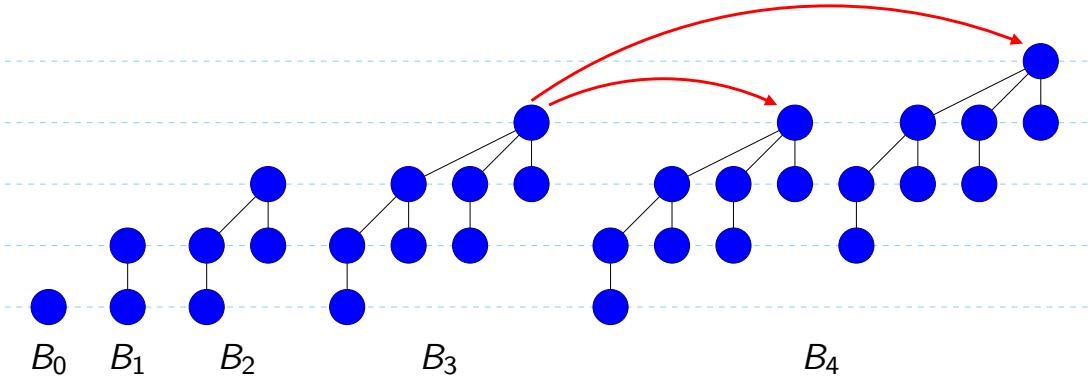
## Binomialbäume Beispiel (Forts.)



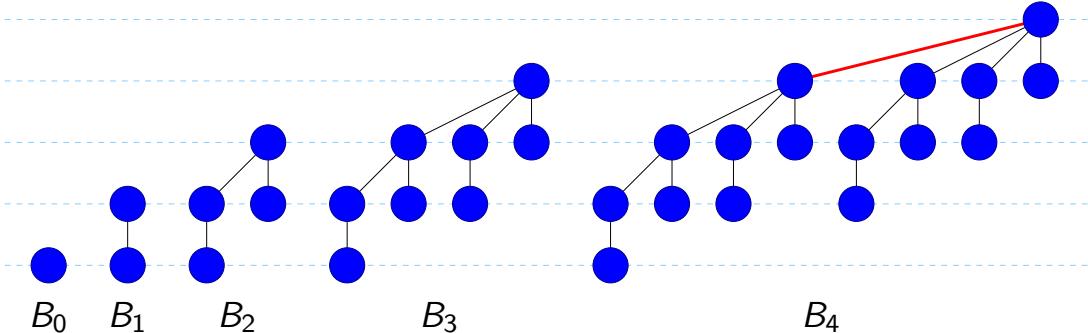
## Binomialbäume Beispiel (Forts.)



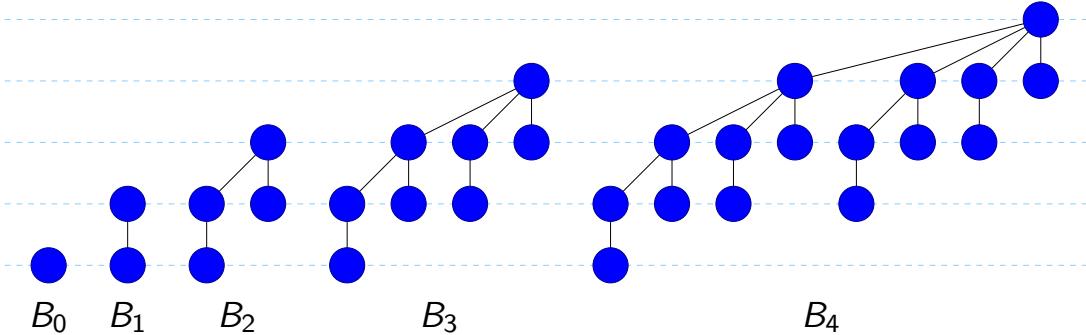
## Binomialbäume Beispiel (Forts.)



## Binomialbäume Beispiel (Forts.)

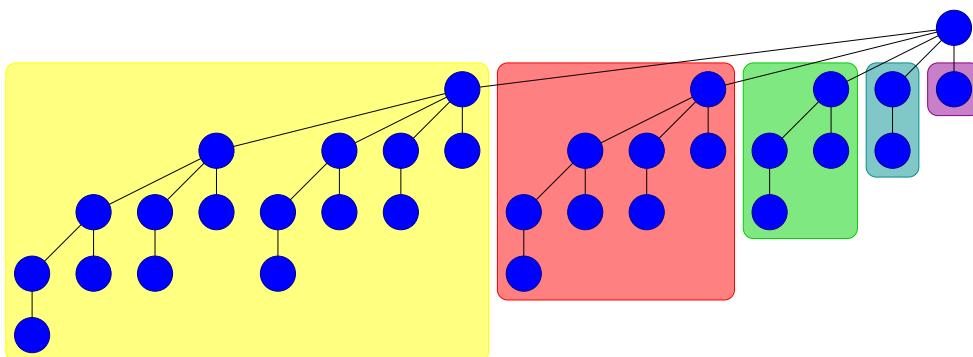


## Binomialbäume Beispiel (Forts.)



## Binomialbäume Beobachtung

Beobachtung:  $B_5$  enthält  $B_0, B_1, B_2, B_3$  und  $B_4$  als Kindknoten



Allgemein: Der Binomialbaum  $B_{k+1}$  enthält die Binomialbäume  $B_0, B_1, \dots, B_k$  als Kinder

# Eigenschaften von Binomialbäumen

**Lemma.** Für alle  $k = 0, 1, \dots$  gilt:

1.  $B_k$  besteht aus  $2^k$  Knoten
2. die Tiefe von  $B_k$  ist gleich  $k$
3. in  $B_k$  gibt auf Tiefe  $i$  genau  $\binom{k}{i}$  Knoten für alle  $i = 0, 1, \dots, k$
4. Der Grad der Wurzel von  $B_k$  ist gleich  $k$  und ist größer als der Grad jedes anderen Knotens
5. Werden die Kinder der Wurzel von  $B_k$  von links nach rechts von  $k-1, k-2, \dots, 0$  durchnummieriert, dann ist Kind  $i$  die Wurzel des Binomialbaums  $B_i$

# Eigenschaften von Binomialbäumen (Forts.)

**Beweis** mittels Induktion über  $k$ .

Induktionsanfang:  $k = 0 \checkmark$

Induktionsbehauptung: Obiges Lemma gilt für den Binomialbaum  $B_{k-1}$

Induktionsschritt:  $k-1 \rightsquigarrow k$

1.  $B_k$  besteht aus zwei Kopien von  $B_{k-1}$ . Unter Einsatz der Induktionsbehauptung ist die Anzahl der Knoten in  $B_k$  gleich:

$$2^{k-1} + 2^{k-1} = 2^k.$$

2. Laut IB hat  $B_{k-1}$  die Tiefe  $k-1$ . Aufgrund der Art und Weise, wie  $B_k$  konstruiert wird, hat dieser Baum die Tiefe  $(k-1) + 1 = k$

## Eigenschaften von Binomialbäumen (Forts.)

3. Sei  $D(k, i)$  die Anzahl der Knoten der Tiefe  $i$  des Baums  $B_k$ .  $B_k$  besteht aus zwei Kopien von  $B_{k-1}$ , die um eine Stufe versetzt angeordnet sind. Betrachte einen Knoten von  $B_{k-1}$  der Tiefe  $i$ . Dieser Knoten kommt in  $B_k$  zweimal vor und zwar in Tiefe  $i$  und  $i + 1$ .

Hieraus folgt:

$$\begin{aligned} D(k, i) &= D(k-1, i) + D(k-1, i-1) \\ &= \binom{k-1}{i} + \binom{k-1}{i-1} \\ &= \binom{k}{i} \end{aligned}$$

## Eigenschaften von Binomialbäumen (Forts.)

4. Die Wurzel von  $B_k$  ist der einzige Knoten, dessen Grad sich von den entsprechenden Knoten in  $B_{k-1}$  unterscheidet. Dieser Knoten war vorher die Wurzel von  $B_{k-1}$  und erhielt ein zusätzliches Kind. Daher ist sein Grad gleich  $(k-1) + 1 = k$

5. Laut IB sind die Kinder der Wurzel von  $B_{k-1}$  die Binomialbäume  $B_{k-2}, B_{k-3}, \dots, B_0$ . Bei der Konstruktion von  $B_k$  wird eine Kopie von  $B_{k-1}$  als linkes Kind unterhalb der Wurzel eingefügt. Somit hat die Wurzel von  $B_k$  exakt die im Lemma angegebenen Kinder

**Konsequenz:** Der maximale Grad eines jeden Knotens in einem Binomialbaum der Größe  $n$  ist  $\log_2 n$

# Binomial Heaps

Binomial Heap  $H \rightsquigarrow$  Menge von Binomialbäumen

Eigenschaften:

1. Jeder Binomialbaum in  $H$  erfüllt die Min-Heap Eigenschaft, d.h., der Schlüssel eines Knotens ist immer kleiner als die Schlüssel seiner Kinder
2. Für jede Zahl  $k = 0, 1, 2, \dots$  ist in  $H$  höchstens ein Binomialbaum  $B_k$  enthalten
3. Die Wurzeln der Binomialbäume werden in einer verketteten Liste gespeichert, deren Elemente nach aufsteigendem Grad  $k$  sortiert sind

# Binomial Heaps (Forts.)

Konsequenz:

- Die Wurzel eines Binomialbaums enthält das Element mit dem kleinsten Schlüssel
- Ein Binomial Heap mit  $n$  Knoten besteht aus  $\lfloor \log_2 n \rfloor + 1$  Binomialbäumen
- Anhand der Binärdarstellung von  $n$  kann man die in  $H$  enthaltenen Binomialbäume ermitteln

# Binomial Heap Priority Queue

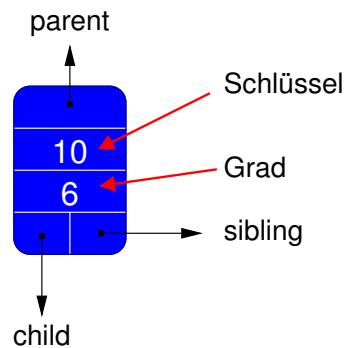
- $\text{MAKEBINOMIALHEAP}()$   $\rightsquigarrow$  Erstellen eines leeren Binomial Heaps
- $\text{BINOMIALHEAPMINIMUM}(H)$   $\rightsquigarrow$  Zeiger auf einen Knoten mit minimalem Schlüssel zurückgeben
- $\text{BINOMIALLINK}(y, z)$   $\rightsquigarrow$  zwei Binomialbäume mit Tiefe  $k$  zu einem Binomialbaum der Tiefe  $k + 1$  verknüpfen
- $\text{BINOMIALHEAPUNION}(H_1, H_2)$   $\rightsquigarrow$  Vereinigung der Heaps  $H_1$  und  $H_2$  zu einem Heap

# Binomial Heap Priority Queue (Forts.)

- $\text{BINOMIALHEAPINSERT}(H, x)$   $\rightsquigarrow$  Einfügen des Elements  $x$  in den Heap  $H$
- $\text{BINOMIALHEAPEXTRACTMIN}(H)$   $\rightsquigarrow$  aus dem Heap  $H$  das Element mit dem kleinsten Schlüssel entfernen
- $\text{BINOMIALHEAPDELETE}(H, x)$   $\rightsquigarrow$  Element  $x$  aus dem Heap  $H$  entfernen
- $\text{BINOMIALHEAPDECREASEKEY}(x, k)$   $\rightsquigarrow$  Verkleinern des Schlüssels des Elements  $x$  auf den Wert  $k$

# Knoten innerhalb eines Binomialheaps

Modellierung der Knoten als **Zeigerstruktur**:

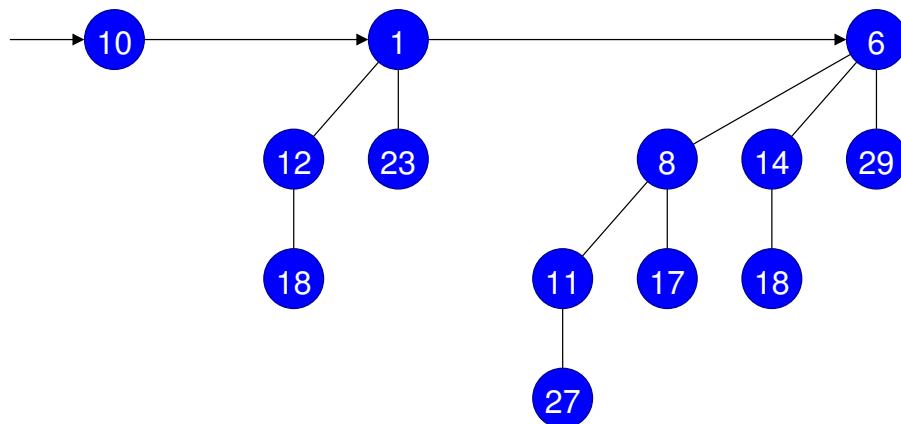


**Vereinbarung:**

- Globale Variable  $head(H) \rightsquigarrow$  Zeiger auf die Wurzel des ersten Binomialbaums im Heap
- Wurzelknoten bilden eine verkettete Liste, die nach aufsteigendem Grad sortiert ist

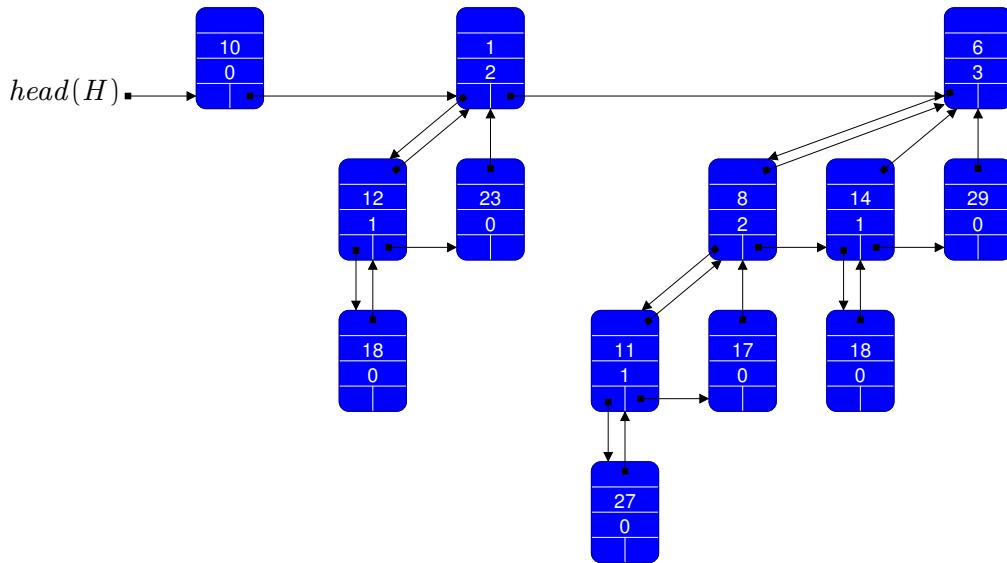
# Binomial Heap Beispiel

Ein Binomial Heap ...



## Binomial Heap Beispiel (Forts.)

... und dessen Realisierung im Hauptspeicher



## Suche eines Elements mit minimalen Schlüssel

**Beobachtung:** Da jeder Binomialbaum die Min-Heap Eigenschaft erfüllt, befindet sich alle Elemente mit minimalem Schlüssel in den Wurzelknoten der Binomialbäume

**Idee:** Durchlaufe alle Wurzelknoten und suche dort nach einem minimalen Element

**Laufzeit:**

- Bekannt: Ein Binomial Heap mit  $n$  Elementen besteht aus höchstens  $\lfloor \log_2 n \rfloor$  Binomialbäumen
- Die Liste der Wurzelknoten enthält  $\lfloor \log_2 n \rfloor$  Knoten

~ Laufzeit  $O(\log_2 n)$

# Algorithmus BINOMIALHEAPMINIMUM( $H$ )

**BINOMIALHEAPMINIMUM( $H$ )**

**Input:** Binomial Heap  $H$

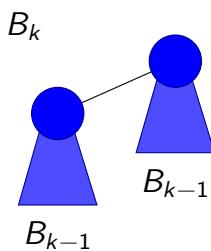
**Output:** Element mit minimalem Schlüssel

```

1  $y := \text{NIL}$ 
2  $x := \text{head}(H)$ 
3  $min := \infty$ 
4 while  $x \neq \text{NIL}$ 
5   if  $\text{key}(x) < min$  then
6      $min := \text{key}(x)$ 
7      $y := x$ 
8    $x := \text{ sibling}(x)$ 
9 return  $y$ 
```

# Verknüpfung von Binomialbäumen

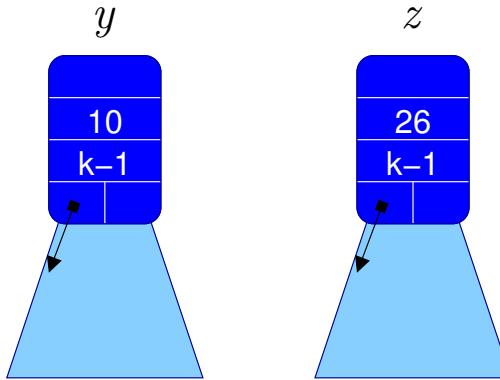
**Aufgabe:** Vereinige zwei Binomialbäume  $B_{k-1}$  zu einem Binomialbaum  $B_k$



**Ansatz:** Zeiger “umbiegen”

## Verknüpfung von Binomialbäumen (Forts.)

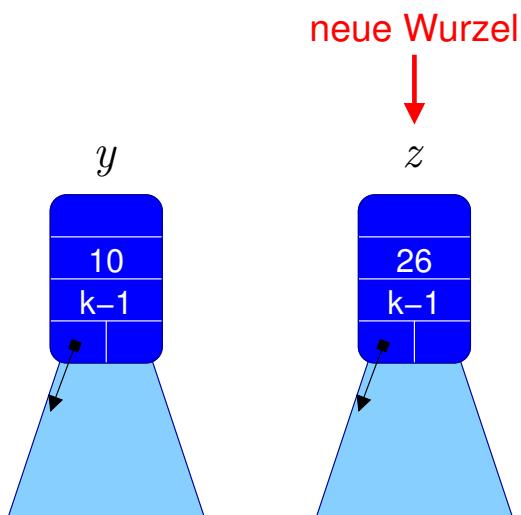
Gegeben: Zeiger  $y$  und  $z$  auf Wurzelknoten von  $B_{k-1}$



## Verknüpfung von Binomialbäumen (Forts.)

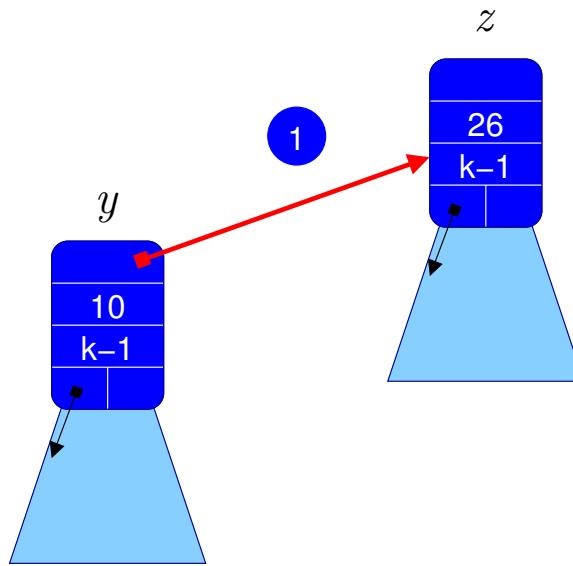
Ziel:

- $z$  wird die Wurzel eines Binomialbaums  $B_k$
- $y$  ist das erste Kind von  $z$



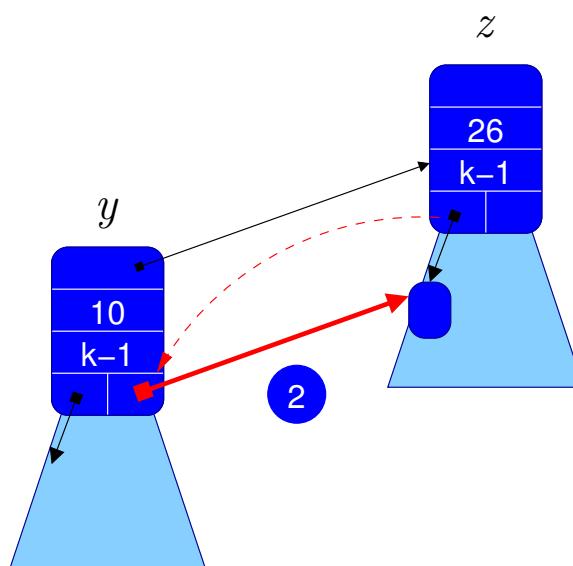
## Verknüpfung von Binomialbäumen (Forts.)

Schritt 1:  $z$  wird der Elternknoten von  $y$



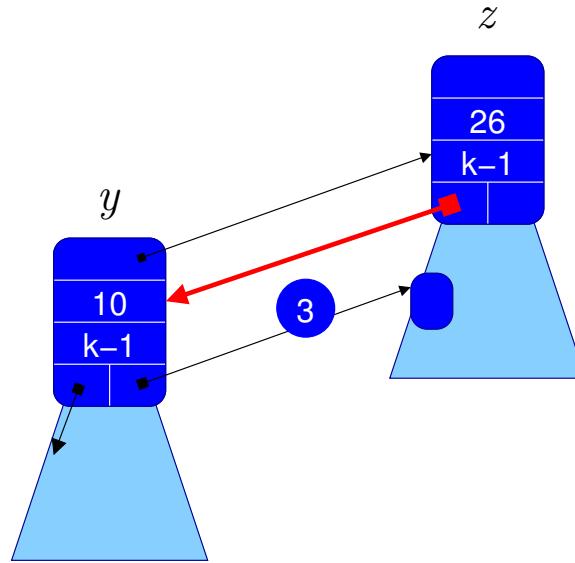
## Verknüpfung von Binomialbäumen (Forts.)

Schritt 2: Das erste Kind von  $z$  wird der Geschwisterknoten von  $y$



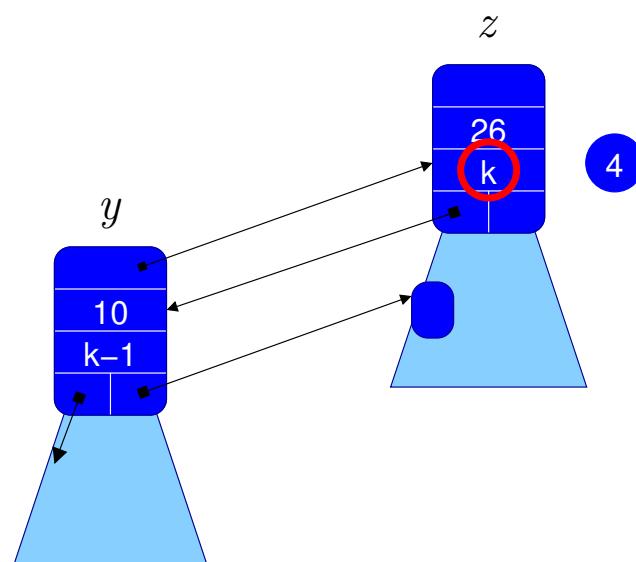
## Verknüpfung von Binomialbäumen (Forts.)

Schritt 3:  $y$  wird das erste Kind von  $z$



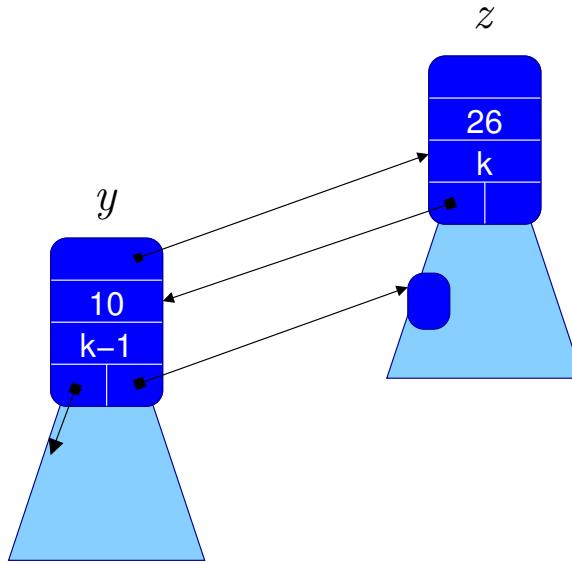
## Verknüpfung von Binomialbäumen (Forts.)

Schritt 4: Die Tiefe von  $z$  wird um 1 erhöht



## Verknüpfung von Binomialbäumen (Forts.)

Ergebnis:



## Algorithmus BINOMIALLINK( $y, z$ )

**BINOMIALLINK( $y, z$ )**

**Input:** Wurzeln  $y$  und  $z$  zweier Binomialbäume  $B_{k-1}$

**Output:** Binomialbaum  $B_k$  mit Wurzel  $z$

- 1  $parent(y) := z$
- 2  $sibling(y) := child(z)$
- 3  $child(z) := y$
- 4  $degree(z) := degree(z) + 1$

**Laufzeit:**  $O(1)$

# Merge Operation für Heaps

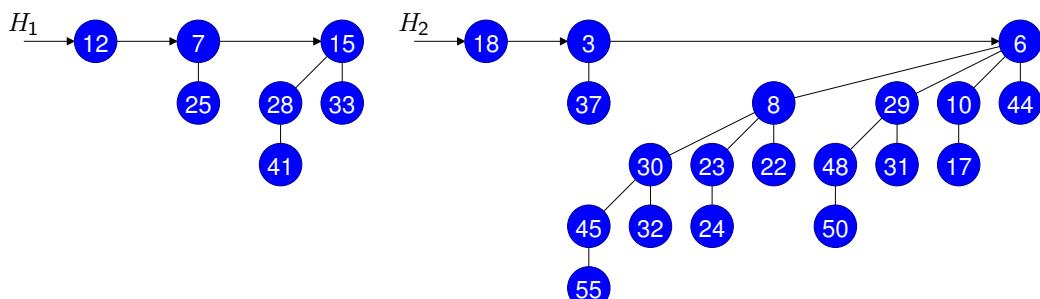
**Aufgabe:** Füge die Wurzellisten der Binomial Heaps  $H_1$  und  $H_2$  zu einer Liste zusammen

**Nebenbedingung:** Die Liste soll anhand der Grade der Wurzeln aufsteigend sortiert sein

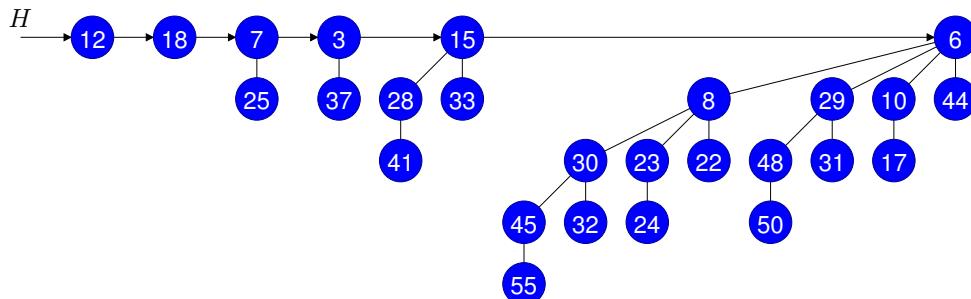
**Realisierung:** Algorithmus BINOMIALHEAPMERGE( $H_1, H_2$ )  
 ↵ Übungsaufgabe

**Laufzeit:**  $O(\log_2 n_1 + \log_2 n_2)$ , wobei  $n_1$  und  $n_2$  die Anzahl der Elemente im Heap  $H_1$  bzw.  $H_2$  ist

# Beispiel Merge Operation



## Beispiel Merge Operation (Forts.)



## Vereinigung von Binomial Heaps

**Aufgabe:** Vereinige zwei Binomial Heaps  $H_1$  und  $H_2$

**Vorverarbeitungsschritt:** Merge Operation

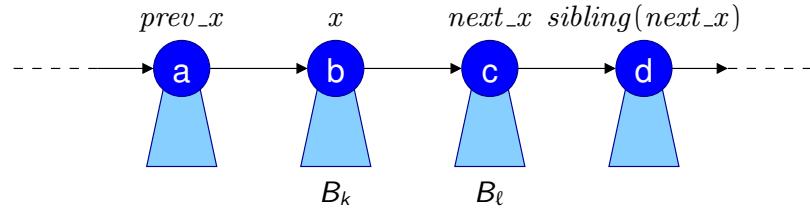
**Ansatz:** Durchlaufe die von  $\text{BINOMIALHEAPMERGE}(H_1, H_2)$  gelieferte Liste und verknüpfe Binomialbäume gleicher Größe

**Variablen:**

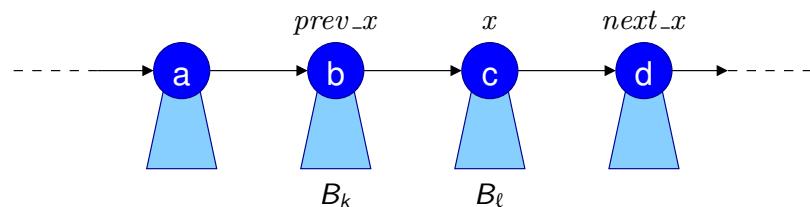
- $x \rightsquigarrow$  Zeiger auf die Wurzel des aktuellen Binomialbaums
- $prev\_x \rightsquigarrow$  Zeiger auf den Vorgänger von  $x$
- $next\_x \rightsquigarrow$  Zeiger auf den Nachfolger von  $x$

## Vereinigung von Binomial Heaps (Fall 1)

Fall 1:  $\text{degree}(x) \neq \text{degree}(\text{next\_}x)$

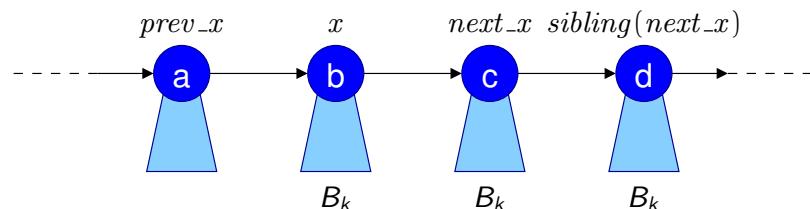


Lösung: alle Zeiger nach rechts verschieben

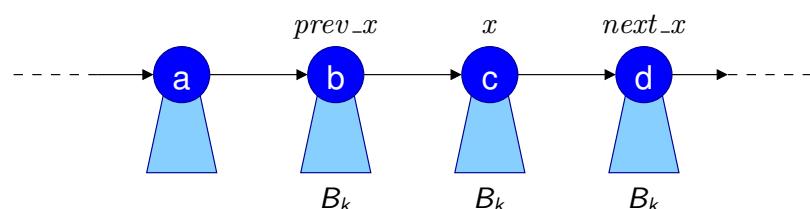


## Vereinigung von Binomial Heaps (Fall 2)

Fall 2:  $\text{degree}(x) = \text{degree}(\text{next\_}x) = \text{degree}(\text{sibling}(\text{next\_}x))$

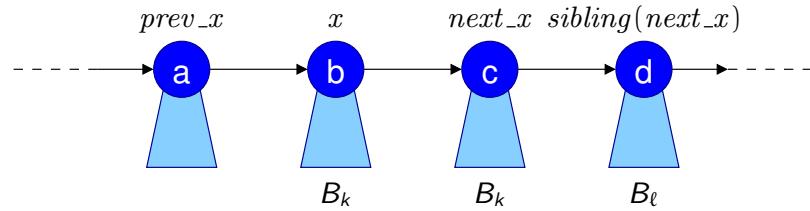


Lösung: alle Zeiger nach rechts verschieben

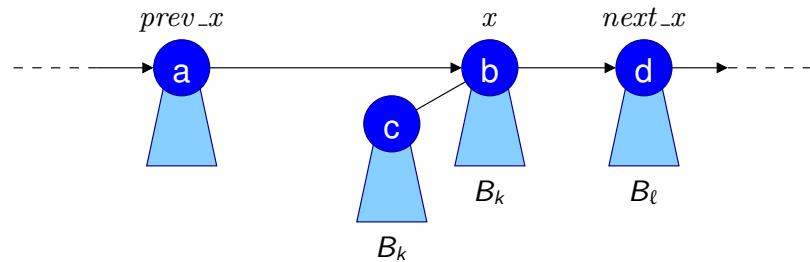


## Vereinigung von Binomial Heaps (Fall 3)

**Fall 3:**  $\text{degree}(x) = \text{degree}(\text{next\_}x) \neq \text{degree}(\text{ sibling}(\text{next\_}x))$  und  $\text{key}(x) \leq \text{key}(\text{next\_}x)$

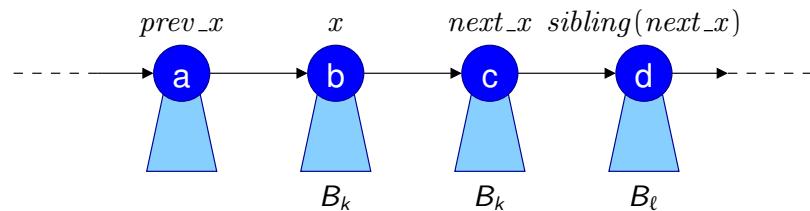


**Lösung:** Füge  $\text{next\_}x$  unterhalb von  $x$  ein

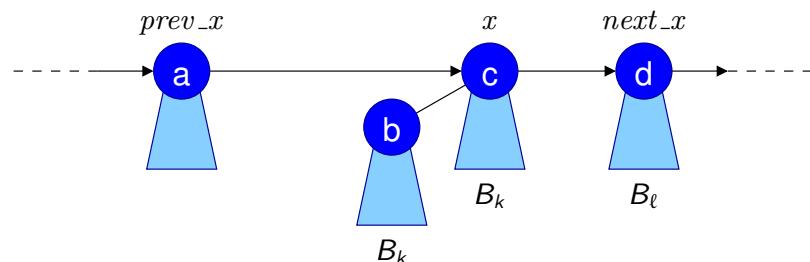


## Vereinigung von Binomial Heaps (Fall 4)

**Fall 4:**  $\text{degree}(x) = \text{degree}(\text{next\_}x) \neq \text{degree}(\text{ sibling}(\text{next\_}x))$  und  $\text{key}(x) > \text{key}(\text{next\_}x)$



**Lösung:** Füge  $x$  unterhalb von  $\text{next\_}x$  ein



# Algorithmus BINOMIALHEAPUNION( $H_1, H_2$ )

**BINOMIALHEAPUNION( $H_1, H_2$ )**

**Input:** Binomial Heaps  $H_1$  und  $H_2$

**Output:** Vereinigung  $H$  der Heaps  $H_1$  und  $H_2$

```

1  $H := \text{MAKEBINOMIALHEAP}()$ 
2  $head(H) := \text{BINOMIALHEAPMERGE}(H_1, H_2)$ 
3 Gib den Speicher der Knoten  $H_1$  und  $H_2$  frei
4 if  $head(H) = \text{NIL}$  then
5   return  $H$ 
6  $prev\_x := \text{NIL}$ 
7  $x := head(H)$ 
8  $next\_x := sibling(x)$ 
```

# BINOMIALHEAPUNION( $H_1, H_2$ ) (Forts.)

```

9 while  $next\_x \neq \text{NIL}$  do
10   if  $degree(x) \neq degree(next\_x)$  or
11      $(sibling(next\_x) \neq \text{NIL}$  and
12        $degree(sibling(next\_x)) = degree(x))$  then
13      $prev\_x := x$ 
14      $x := next\_x$ 
15   else
16     if  $key(x) \leq key(next\_x)$  then
17        $sibling(x) := sibling(next\_x)$ 
18        $\text{BINOMIALLINK}(next\_x, x)$ 
```

BINOMIALHEAPUNION( $H_1, H_2$ ) (Forts.)

```

19      else
20          if  $prev\_x = \text{NIL}$  then
21               $head(H) := next\_x$ 
22          else
23               $sibling(prev\_x) := next\_x$ 
24              BINOMIALLINK( $x, next\_x$ )
25               $x := next\_x$ 
26               $next\_x := sibling(x)$ 
27      return  $H$ 

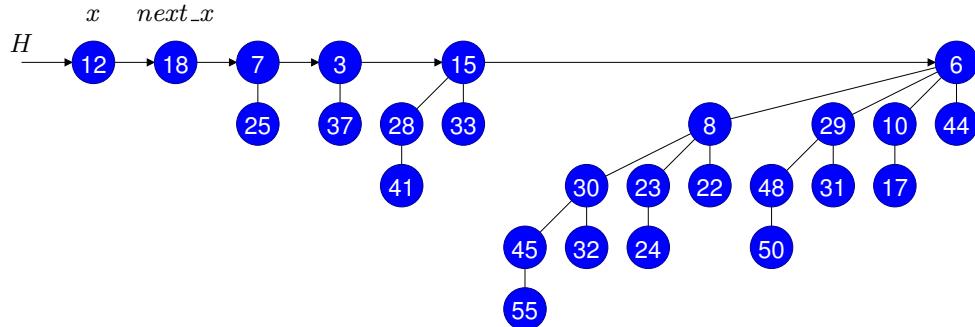
```

## Bemerkungen

- Behandlung von
  - ▷ Fall 1 und 2  $\rightsquigarrow$  Zeilen 10 bis 14
  - ▷ Fall 3  $\rightsquigarrow$  Zeilen 17 bis 18
  - ▷ Fall 4  $\rightsquigarrow$  Zeilen 20 bis 25
- In jedem Durchlauf der Schleife wandern die Zeiger entweder um eine Position nach rechts oder die Wurzelliste wird um einen Knoten verkürzt
- Laufzeit:  $O(\log_2 n)$

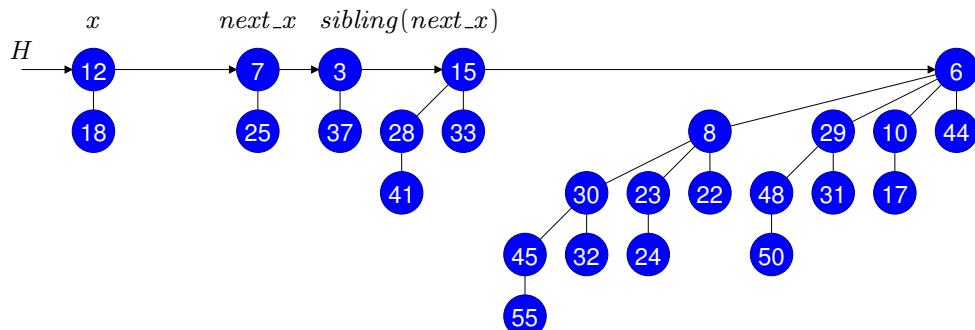
## Beispiel zur Heap Vereinigung

Ausgangspunkt: Obiges Beispiel nach der Merge-Operation



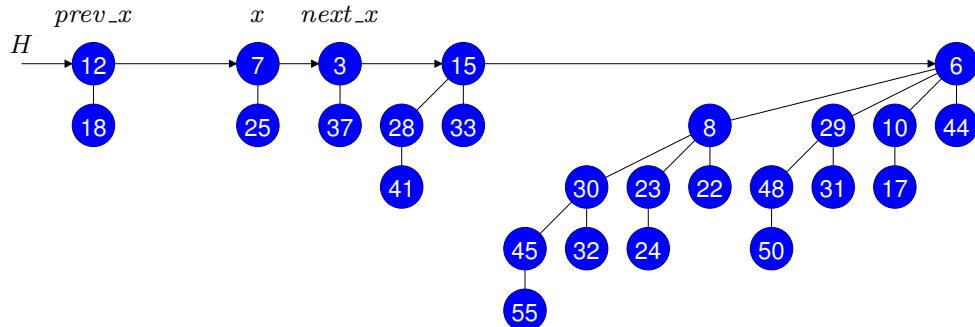
Situation:  $\text{degree}(x) = \text{degree}(\text{next\_}x)$  und  $\text{key}(x) \leq \text{key}(\text{next\_}x) \rightsquigarrow$  Fall 3

## Beispiel zur Heap Vereinigung (Forts.)



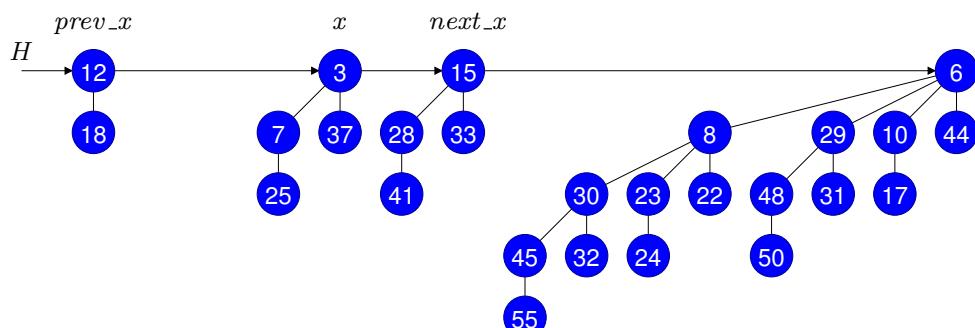
Situation:  $\text{degree}(x) = \text{degree}(\text{next\_}x) = \text{degree}(\text{sibling}(\text{next\_}x)) \rightsquigarrow$  Fall 2

## Beispiel zur Heap Vereinigung (Forts.)



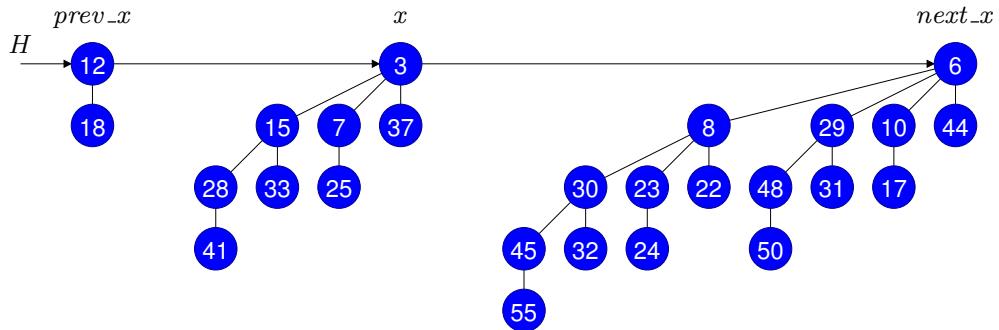
**Situation:**  $\text{degree}(x) = \text{degree}(\text{next\_}x)$  und  $\text{key}(x) > \text{key}(\text{next\_}x)$   $\rightsquigarrow$  Fall 4

## Beispiel zur Heap Vereinigung (Forts.)



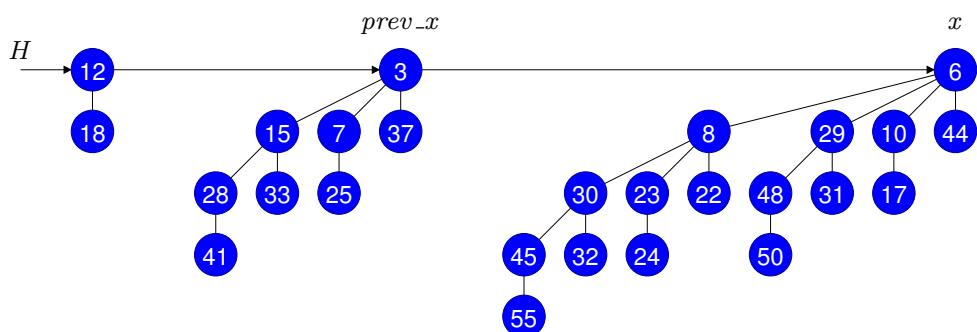
**Situation:**  $\text{degree}(x) = \text{degree}(\text{next\_}x)$  und  $\text{key}(x) \leq \text{key}(\text{next\_}x)$   $\rightsquigarrow$  Fall 3

## Beispiel zur Heap Vereinigung (Forts.)



**Situation:**  $degree(x) \neq degree(next\_x) \rightsquigarrow$  Fall 1

## Beispiel zur Heap Vereinigung (Forts.)



**Situation:**  $next\_x = \text{NIL} \rightsquigarrow$  while Schleife wird verlassen

## Einfügen eines Knotens

**Idee:** Führe das Einfügen auf die Vereinigung zurück

**BINOMIALHEAPINSERT( $H, x$ )**

**Input:** Binomial Heap  $H$ , Knoten  $x$

- 1  $H' := \text{MAKEBINOMIALHEAP}()$
- 2 *Allociere Knoten  $x$*
- 3  $\text{parent}(x) := \text{NIL}$
- 4  $\text{child}(x) := \text{NIL}$
- 5  $\text{ sibling}(x) := \text{NIL}$
- 6  $\text{degree}(x) := 0$
- 7  $\text{head}(H') := x$
- 8  $H = \text{BINOMIALHEAPUNION}(H, H')$

**Laufzeit:**  $O(\log_2 n)$  bei einem Heap  $H$  mit  $n$  Elementen

## Löschen eines Knotens mit minimalem Schlüssel

**BINOMIALHEAPEXTRACTMIN( $H$ )**

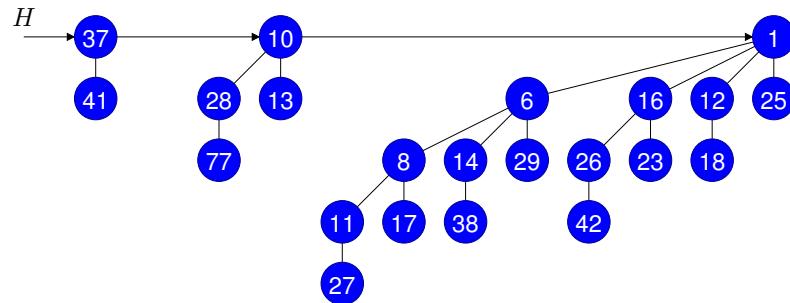
**Input:** Binomial Heap  $H$

**Output:** Element  $x$  mit minimalem Schlüssel

- 1 *Finde in der Wurzelliste von  $H$  einen Knoten  $x$  mit minimalem Schlüssel*
- 2 *Lösche  $x$  aus der Wurzelliste von  $H$*
- 3  $H' := \text{MAKEBINOMIALHEAP}()$
- 4 *Invertiere die Reihenfolge der Kinder von  $x$  und setze  $\text{head}(H')$  auf den Anfang dieser Liste*
- 5  $H = \text{BINOMIALHEAPUNION}(H, H')$
- 6 **return  $x$**

## Beispiel Entfernen eines Minimums

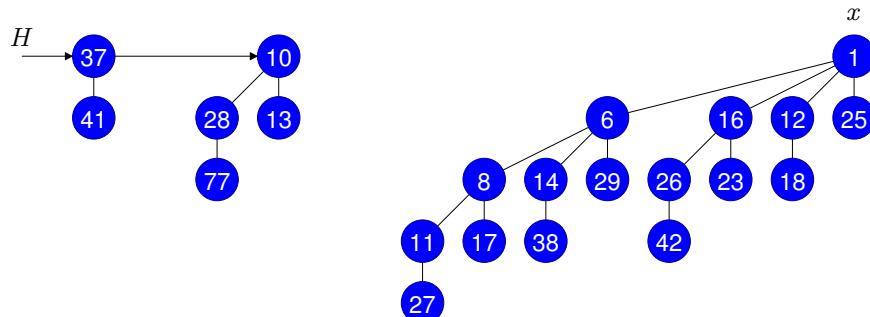
Ausgangssituation:



Nächster Schritt: Suche des Minimums

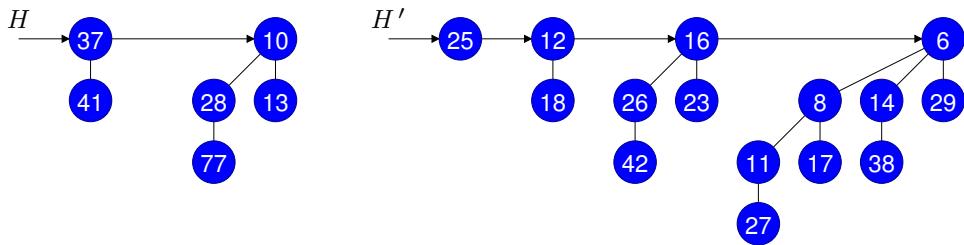
## Beispiel Entfernen eines Minimums (Forts.)

Minimum: Knoten  $x$



Nächster Schritt: Entfernen von  $x$  aus dem Heap und Invertieren der Liste seiner Kinder

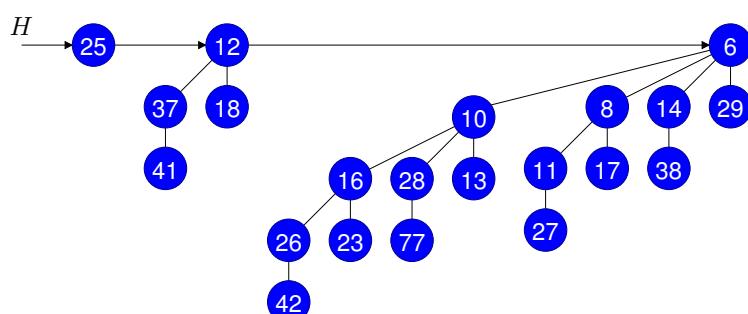
## Beispiel Entfernen eines Minimums (Forts.)



Nächster Schritt: Vereinigen der beiden Heaps  $H$  und  $H'$

## Beispiel Entfernen eines Minimums (Forts.)

Ergebnis:



## Verkleinern des Schlüssels eines Knotens

**Idee:** Schiebe den Inhalt des Knotens solange in Richtung der Wurzel des Binomialbaums bis zu einem Elternknoten mit kleinerem Schlüssel

**Beachte:** Es werden bei dieser Operation keine Zeiger verändert, sondern die Inhalte des Schlüsselfelds sowie der Satellitendaten vertauscht

**Laufzeit:**

- Schlimmster Fall: Der Schlüssel eines Blatts im größten Binomialbaum des Heaps wird so klein, dass der Datensatz bis zur Wurzel hoch wandert
- Laufzeit:  $O(\log_2 n)$

## Algorithmus zum Verkleinern des Schlüssels

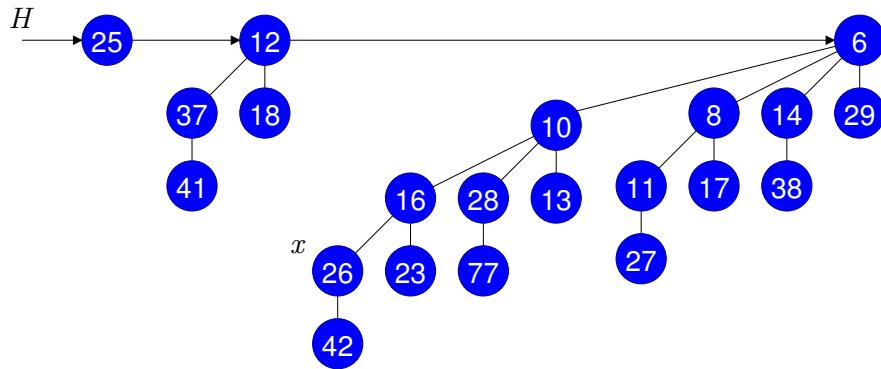
**BINOMIALHEAPDECREASEKEY( $H, x, k$ )**

**Input:** Binomial Heap  $H$ , Knoten  $x$ , neuer Schlüssel  $k$

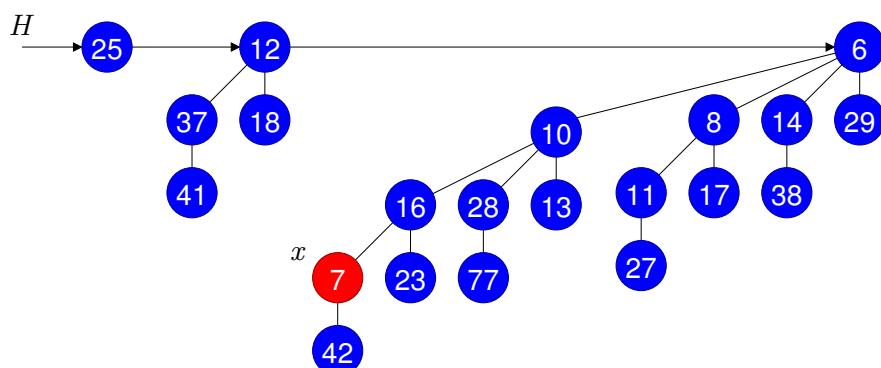
- 1 **if**  $k > \text{key}(x)$  **then**
- 2     **error** "neuer Schlüssel ist größer als der alte"
- 3      $\text{key}(x) := k$
- 4      $y := x$
- 5      $z := \text{parent}(y)$
- 6     **while**  $z \neq \text{NIL}$  **and**  $\text{key}(y) < \text{key}(z)$  **do**
- 7         Vertausche  $\text{key}(y)$  und  $\text{key}(z)$
- 8         Vertausche die Satellitendaten von  $y$  und  $z$
- 9          $y := z$
- 10         $z := \text{parent}(y)$

## Beispiel Verkleinern des Schlüssels

Ausgangssituation: Verkleinern des Schlüssels von  $x$  auf 7

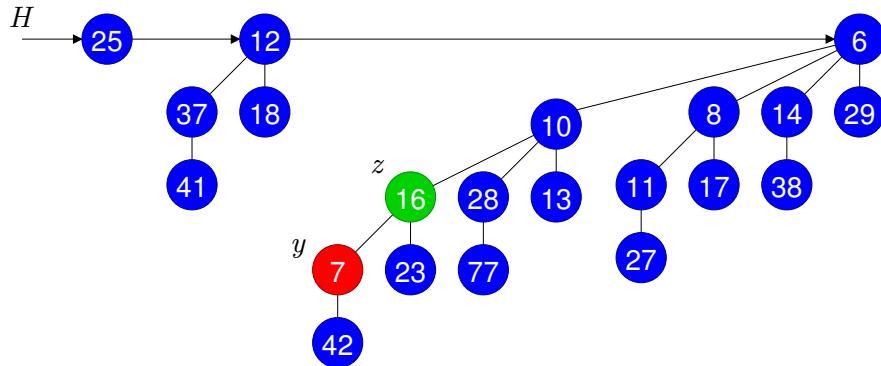


## Beispiel Verkleinern des Schlüssels (Forts.)



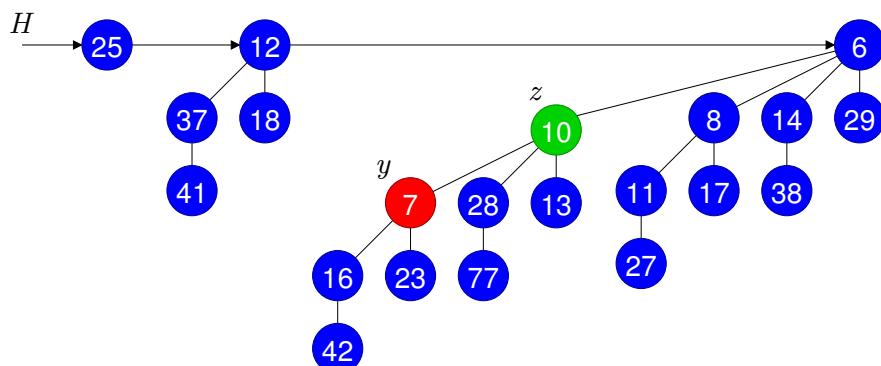
## Beispiel Verkleinern des Schlüssels (Forts.)

Zuweisen der Zeiger  $y$  und  $z$ :



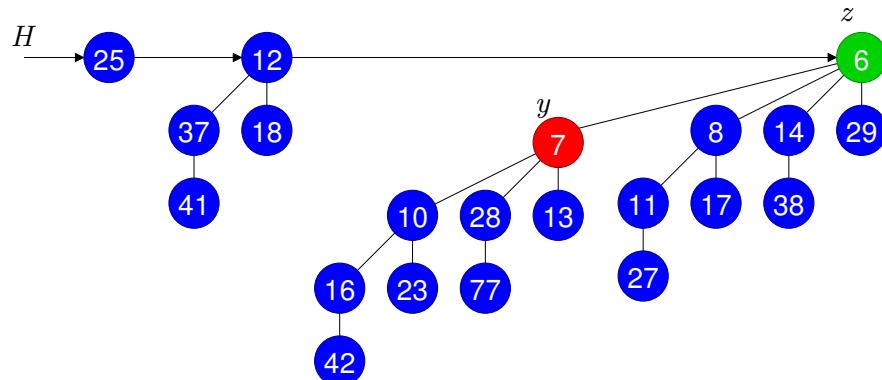
**Situation:** Schlüssel von  $y$  ist kleiner als der von  $z \rightsquigarrow$  Daten vertauschen

## Beispiel Verkleinern des Schlüssels (Forts.)



**Situation:** Schlüssel von  $y$  ist kleiner als der von  $z \rightsquigarrow$  Daten vertauschen

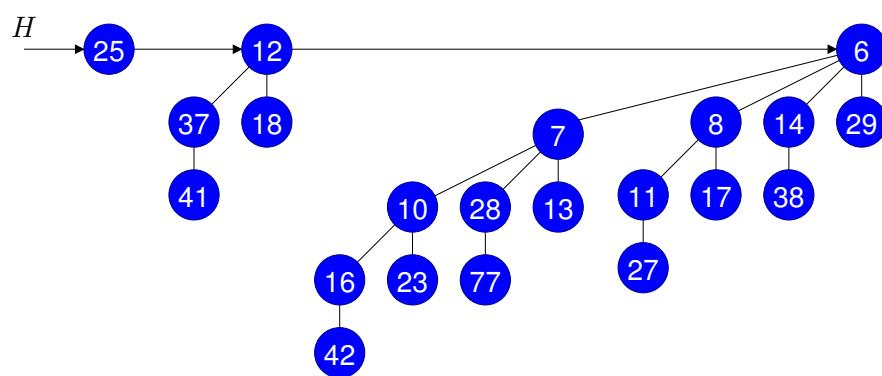
## Beispiel Verkleinern des Schlüssels (Forts.)



**Situation:** Schlüssel von  $y$  ist nicht kleiner als der von  $z \rightsquigarrow$  Fertig

## Beispiel Verkleinern des Schlüssels (Forts.)

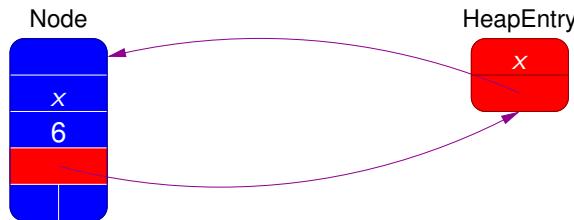
**Endergebnis:**



## Implementierungsaspekte

**Feststellung:** Um den Schlüssel verkleinern zu können, muss das Element im Binomial Heap gefunden werden

**Ansatz:** Verknüpfe Element mit dem entsprechenden Knoten im Binomialbaum



**Beachte:** Der Zeiger vom Knoten zum Element ist notwendig, um den anderen Zeiger bei Verschiebung des Elements im Binomialbaum aktualisieren zu können

## Löschen eines Knotens anhand des Schlüssels

**Aufgabe:** Löschen des Knotens  $x$  aus dem Heap

**Idee:**

1. Mache  $x$  zum (einzigen) Minimum des Heaps
2. Lösche das Minimum aus dem Heap

**Algorithmus**

**BINOMIALHEAPDELETE( $H, x$ )**

**Input:** Binomial Heap  $H$ , zu löschender Knoten  $x$

- 1 **BINOMIALHEAPDECREASEKEY( $H, x, -\infty$ )**
- 2 **BINOMIALHEAPEXTRACTMIN( $H$ )**

**Laufzeit:**  $O(\log_2 n)$

# Zusammenfassung

- Priority Queues dienen zur Speicherung von Daten mit Prioritäten
- Die Priorität eines Datensatzes wird anhand des Schlüssels ermittelt
- Heap Sort liefert eine Priority Queue auf Basis eines Arrays
- Eine Alternative ist der Binomial Heap, der eine Priority Queue auf Basis von Binomialbäumen bereitstellt
- Beide Ansätze sind optimal, da alle Zugriffe auf die Queue in Laufzeit  $O(\log_2 n)$  durchführbar sind